

Confinement isotrope d'un cylindre élastique

Laurent Boué, Mokhtar Adda-Bedia & Arezki Boudaoud

Laboratoire de Physique Statistique
École Normale Supérieure
24 rue Lhomond 75231 Paris cedex 05
lboue@lps.ens.fr

Résumé. On obtient un exemple simplifié de compaction d'objets élastiques en se plaçant en géométrie cylindrique. Dans ce cas, la forme des plis peut être décrite de façon exacte par l'équation de l'*Elastica* d'Euler. La résolution du problème à frontières libres qui découle de cette représentation donne lieu à un diagramme de phase étonnamment riche que nous présentons en détail.

Abstract. We consider a two-dimensional analog of crumpled paper by studying the buckling of an elastic cylinder. While the exact shape of folds is given by the *Elastica* equation of Euler, we find an unexpectedly rich phase diagram, even for moderate confinements, by solving a free boundary problem.

1 Contexte général

Bien que les déformations à grandes échelles de corps élastiques bidimensionnels soient omniprésentes dans la vie courante (plis des vêtements, rides sur la peau, papier froissé...), le degré de complexité qui se cache derrière ces réseaux de plis passe souvent inaperçu. Ces phénomènes de pliage et de froissage sont pourtant loin d'être anecdotiques puisqu'ils trouvent des parallèles dans un grand nombre de domaines inattendus et a priori très différents. Par exemple les plis des feuilles des plantes peuvent être vus comme simple conséquence de la croissance des feuilles à l'intérieur des bourgeons. Le froissage des tôles lors d'un accident de voiture fait aussi partie de cette classe de problèmes qui considère la compaction mécanique d'objets de basse dimension (filaments 1D ou corps minces 2D). De manière générale, la compréhension du comportement de plaques élastiques soumises à des forces extérieures, même faibles, est un problème compliqué qui soulève des questions théoriques très stimulantes. Une première difficulté vient du fait que les déformations ne sont presque jamais distribuées de manière uniforme [1]. Il suffit en effet de froisser une feuille de papier pour constater que les déformations se concentrent le long de plis reliés entre eux par des points coniques. Alors que le voisinage de ces singularités subit des déformations plastiques irréversibles, de larges portions de la feuille restent intactes. De plus, des régions initialement lointaines l'une de l'autre sont susceptibles d'entrer en contact lors du confinement. Ceci implique l'introduction de contraintes non-locales rendant délicate la prescription des conditions aux bords. En combinant les deux effets de flexion et d'extension, les équations différentielles non-linéaires de Föppl-von Kármán [2] constituent traditionnellement le point de départ pour étudier les déformations de plaques élastiques. Elles se révèlent cependant être d'une complexité rédhitoire et ne sont que peu exploitables aussi bien analytiquement que numériquement [3]. Dans ce contexte, seules les déformations les plus élémentaires apparaissant lors du froissage de plaques élastiques, les cônes développables [4] et les plis (ou « ridges ») [5] ont pu être récemment identifiés et étudiés en détail.

Dans cet article, nous abordons l'étude de la compaction d'une plaque élastique d'une manière différente. En nous plaçant dans le cas du confinement isotrope d'un cylindre élastique, nous montrons qu'il est possible de déterminer les propriétés mécaniques ainsi que les déformations subies par le cylindre en se ramenant formellement à la résolution d'un problème à multi-frontières libres non-linéaire [6] et nous étudions le diagramme de phase qui en résulte.

2 Mise en place théorique

2.1 Description géométrique

Imaginons une feuille élastique naturellement plate que l'on enroule sur elle-même, en collant les deux extrémités, de manière à lui donner la forme d'un cylindre de rayon R . Cette opération (semblable à rouler en cigarette une feuille de papier) ne demande aucun effort particulier bien que l'amplitude finale de la déformation effectuée soit assez grande (plusieurs fois l'épaisseur du papier). Ceci s'explique par le fait que les cylindres (comme les cônes) ont une courbure de Gauss nulle les autorisant à être développables sur un plan sans avoir à s'étirer, ou même à se déchirer, ce qui n'est jamais le cas pour une surface quelconque. Cette propriété d'isométrie avec le plan offre de grandes simplifications puisqu'elle permet d'éviter les déformations d'étirement, sources de singularités. Nous pouvons alors concentrer notre attention exclusivement sur des déformations de flexion pure ainsi que sur le rôle joué par les auto-contacts. On se place facilement en géométrie cylindrique en introduisant, par la pensée, la feuille à l'intérieur d'un récipient cylindrique indéformable de rayon $b < R$ (cf figure 1). Le nombre sans dimension

$$\epsilon = \frac{(R - b)}{b} > 0 \quad (1)$$

sert de paramètre de contrôle permettant de quantifier l'intensité du confinement. L'invariance des déformations dans la direction transverse permet de se ramener à un problème bidimensionnel : la compaction d'une tige élastique de rayon R dans un cercle de rayon b . L'excès de longueur de la tige l'oblige à former un premier pli symétrique le long duquel elle n'est plus en contact avec son récipient. Le paramètre naturel définissant la forme de la tige est son abscisse curviligne s ayant pour origine le centre du pli. On note s_c l'abscisse curviligne du point où la tige reprend contact avec le récipient et θ_c l'angle entre la verticale au centre du pli et ce point de raccord. La base locale de Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{e}_3, \mathbf{n}\}$, où $\mathbf{t} = \partial_s \mathbf{r}$ et $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{e}_3$ sert de repère orthonormé, le vecteur position de la tige étant donné par :

$$\mathbf{r}(s') = \int_0^{s'} ds (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2) \quad (2)$$

où ϕ est l'angle entre la tangente \mathbf{t} et l'axe horizontal \mathbf{e}_1 . Par convention, on définit la courbure de la tige comme $\kappa = \partial_s \phi$. Cette configuration initiale, dite de type I, est représentée sur la figure 1.

2.2 Équilibre mécanique

Après avoir décrit les aspects géométriques, nous nous posons la question de l'équilibre mécanique d'une telle tige élastique. L'hypothèse simplificatrice majeure ici est que l'on néglige les éventuelles forces de frottement entre le récipient et la tige. Dans ce cas, le récipient exerce une pression normale, $\mathbf{K} = -k\mathbf{n}$ ($k > 0$), sur la tige partout où celle-ci est en contact avec le récipient. Si l'on considère une section de la tige, on note \mathbf{F} et \mathbf{M} la force et le moment exercés par un côté de la section sur l'autre côté. Dans le cas des objets minces, la relation constitutive entre le moment résultant et la courbure de l'objet est linéaire : $\mathbf{M} = B\kappa\mathbf{e}_3$ où B est la rigidité du matériau qui compose l'objet. Si \mathbf{F} et \mathbf{M} sont comptés par unité de longueur dans la direction d'invariance, les équations locales d'équilibre des forces et des moments s'écrivent alors [7] :

$$\left. \begin{aligned} \partial_s \mathbf{F} + \mathbf{K} &= 0, \\ \partial_s \mathbf{M} + \mathbf{t} \times \mathbf{F} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

En décomposant $\mathbf{F} = N\mathbf{t} + Q\mathbf{n}$, la projection globale des équations d'équilibre (3) donne les relations :

$$N = -B(a^2 + \kappa^2/2), \quad (4)$$

$$Q = B\dot{\kappa}, \quad (5)$$

pour les composantes de la tension de la tige et, en notant $(\dot{\cdot}) = \partial_s(\cdot)$:

$$B \left[\dot{\kappa} + \left(a^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 \right) \kappa \right] = k(s), \quad (6)$$

où a^2 est une constante d'intégration. Comme la région formant le pli n'est plus en contact avec le récipient (i.e. $k \equiv 0$), on voit que sa forme, donnée par (6), se réduit à l'équation de l'*Elastica* d'Euler. Bien que cette équation soit intégrable analytiquement en termes de fonctions elliptiques, les conditions aux bords rendent cette option difficile. On obtient en effet un ensemble d'équations implicites et il est plus avantageux de chercher à résoudre l'équation numériquement. La taille du pli étant susceptible de changer suivant l'intensité du confinement, la longueur de l'intervalle $[0, s_c]$ n'est pas fixée à l'avance et doit être déterminée par les conditions aux bords. En dehors du pli, la tige reste collée au récipient. Dans ces régions, le rayon de courbure de la tige est égal au rayon du cercle ce qui signifie que $\kappa = 1/b$ et $\dot{\kappa} = 0$. Les propriétés mécaniques de la tige sont alors facilement calculées : Elle subit une compression pure puisque $\mathbf{F} = -bk_c \mathbf{t}$. On remarque aussi que la valeur de la pression extérieure est égale à une constante que l'on note k_c .

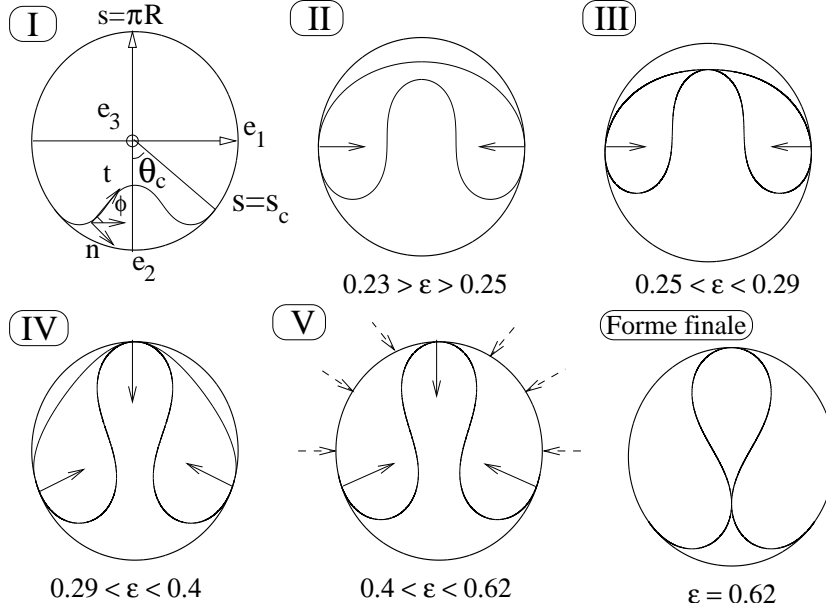


Fig.1. Évolution de la forme de la feuille, vue de dessus, en fonction de l'intensité du confinement ϵ . Les flèches en pointillé signalent la force extérieure d'intensité constante due au récipient tandis que les flèches pleines représentent les forces ponctuelles. Pour améliorer la visibilité, l'amplitude des plis pour les configurations de type III et IV est exagérée. Les conditions aux bords relatives à chaque phase sont détaillées dans le corps du texte.

2.3 Forces ponctuelles

Une pression extérieure $\mathbf{K} = -k_c \mathbf{n}$ d'intensité constante le long des régions de contact est en contradiction avec l'équilibre mécanique global de la tige. En effet, pour maintenir la tige stable, il faudrait que cette pression s'exerce sur tous les points diamétralement opposés de la tige. L'absence de contact le long du pli empêche cette condition d'être réalisée et conduit à un déséquilibre immédiat de la tige. En fait, l'équilibre mécanique impose l'existence de forces ponctuelles, localisées exactement aux points de raccords entre parties libres et parties collées. L'intensité de ces forces ponctuelles doit être ajustée,

a posteriori, pour annuler le déséquilibre dû au pli. Dans le cas général d'un point de décollement situé à l'abscisse s_c , la pression extérieure en ce point s'écrit alors :

$$\mathbf{K}_l = -b\chi\delta(s - s_c)\mathbf{n} \quad (7)$$

où χ est l'intensité correctement ajustée. Ces forces supplémentaires ont des conséquences importantes sur les propriétés mécaniques du système. La courbure κ étant toujours continue le long de la tige, on obtient :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} [\dot{\kappa}(s_c + \eta) - \dot{\kappa}(s_c - \eta)] = \frac{b\chi}{B} \quad (8)$$

en intégrant l'équation (6) autour d'un point de décollement. La composante normale Q de la tension étant proportionnelle à $\dot{\kappa}$, elle subit une discontinuité quand on passe d'une région collée à une région libre. D'autre part, on voit par l'équation (4) que la composante tangentielle N reste quant à elle continue lors de cette transition.

3 Diagramme de phase

Dans la suite, nous déterminons méthodiquement les différentes configurations symétriques autorisées en fonction du paramètre de contrôle ϵ . Il faut assurer l'équilibre mécanique global de la tige, pour chaque configuration, en adaptant de manière appropriée les intensités et placements des forces ponctuelles. La forme de la tige est obtenue en intégrant l'équation de l'*Elastica*. Les conditions aux bords nécessaires pour mener à bien cette intégration, doivent être, elles-aussi, adaptées à chaque configuration. La résolution se fait numériquement par la méthode du tir. Nous décrivons maintenant les caractéristiques des 5 différentes phases trouvées dont les formes typiques sont représentées sur la figure (1). L'énergie élastique V de la tige ainsi que la pression totale W exercée par le cylindre sont reportées sur la figure 2 avec,

$$V = \frac{1}{2}EJ \int_{\text{tige}} \kappa^2 ds \quad \text{et} \quad W = \int_{\text{contact}} (\mathbf{K} + \mathbf{K}_l) \cdot \mathbf{n} ds, \quad (9)$$

où E est le module de Young de la tige et J son moment d'inertie.

3.1 Configuration initiale - Type I

Il est naturel de supposer que la configuration de départ (type I) présente un pli symétrique comme représenté sur la figure 1. Les quantités inconnues sont κ , $\dot{\kappa}$, ϕ ainsi que les deux paramètres a^2 et la frontière libre s_c . On peut les déterminer en imposant les conditions aux bords suivantes :

1. Inextensibilité de la tige : $s_c - b\theta_c = \pi b\epsilon$,
2. Continuité de la courbure : $\kappa(s_c) = 1/b$,
3. Force nulle au centre du pli : $B\dot{\kappa}(0) = 0$,
4. Origine des angles : $\phi(0) = 0$,
5. Symétrie droite-gauche de la tige : $\int_0^{s_c} ds \cos \phi = b \sin \theta_c$.

Le pli central grandit rapidement mais ce type de configurations devient instable pour $\theta_c = \pi/2$ soit $\epsilon \approx 0.23$. En effet, quand θ_c dépasse $\pi/2$ les forces ponctuelles commencent à être dirigées dans le même sens que la force extérieure globale due au récipient : Elles ne servent plus à stabiliser la tige mais sont, au contraire, le moteur d'une instabilité. En appliquant la méthode énoncée en 2.3 pour les forces ponctuelles, on obtient d'ailleurs :

$$k_c = -\frac{B\dot{\kappa}(s_c)}{b \tan \theta_c}. \quad (10)$$

On voit que la pression extérieure sur toute la partie supérieure de la tige tend vers 0 quand θ_c tend vers $\pi/2$.

3.2 Décollement par le haut - Type II

Comme la pression extérieure s'annule de manière uniforme, l'ensemble de la moitié supérieure de la tige se décolle du récipient. La tige n'est alors maintenue en équilibre que par deux contacts ponctuels diamétralement opposés. On note les quantités relatives à la partie supérieure de la tige avec un tilde (courbure $\tilde{\kappa}$ et angle $\tilde{\phi}$) pour les distinguer de celles concernant le pli. Il faut alors déterminer la forme de deux parties libres reliées entre elles par un contact ponctuel situé à un angle $\theta_c = \pi/2$. Les conditions aux bords, pour chaque partie libre, sont similaires à celles utilisées pour les configurations de type I en rajoutant $\phi(s_c) = \tilde{\phi}(s_c) = \pi/2$. Si l'équilibre de la tige est bien assuré, on voit par l'équation (4) que la continuité de la courbure est équivalente à imposer la même constante d'intégration a^2 pour les différentes parties libres. Ce point important restera vrai pour toutes les configurations présentant plusieurs régions libres. Alors que la partie supérieure plonge vers l'intérieur, le pli continue à grandir. Pour $\epsilon \approx 0.25$, il finit par rejoindre le morceau de la tige en train de s'effondrer et cette configuration ne peut plus exister sans auto-intersection. En fait, il est possible de trouver des configurations de type II pour de petits confinements mais leur grande énergie élastique ne leur permet pas d'entrer en compétition avec les configurations de type I (cf figure 2).

3.3 Premier auto-contact - Type III

Afin de prévenir l'apparition d'une auto-intersection il est nécessaire de modifier, à nouveau, les conditions aux bords. Nous devons maintenant imposer la présence d'un auto-contact ponctuel. À cause de ce contact, la tension normale au centre de la tige ne peut plus être nulle. Par action-réaction, la contribution à cette tension due au pli doit annuler celle due à la moitié supérieure. Ces deux modifications se traduisent comme ceci :

- Présence d'un auto-contact ponctuel : $\int_0^{s_c} ds \sin \phi + \int_{s_c}^{\pi R} ds \sin \tilde{\phi} = 0$,
- Force au point de contact : $B\dot{\kappa}(0) = -B\dot{\tilde{\kappa}}(\pi R)$.

Les autres conditions aux bords (angles, symétrie droite-gauche et inextensibilité) restent, pour chaque partie libre, semblables à celles des configurations de type II. On observe que la position du contact central se dirige vers le haut du cercle quand le confinement augmente. Finalement ce point entre en contact avec le cercle pour $\epsilon \approx 0.29$. Cette branche de solution cesse alors, à son tour, d'exister puisque la tige ne peut pas traverser le récipient et doit développer un nouveau contact.

3.4 Trois contacts ponctuels - Type IV

Ce contact avec le récipient apporte une nouvelle force ponctuelle extérieure agissant sur la tige. Il est important à ce stade de rétablir l'équilibre des forces pour tenir compte de ce troisième contact ponctuel. On doit aussi maintenir fixe la position de ce nouveau contact pour interdire un croisement entre la tige et le récipient. Les conditions aux bords sont donc les suivantes :

1. Inextensibilité de la tige,
2. Définition des angles : $\phi(0) = 0$ et $\tilde{\phi}(\pi R) = \pi$,
3. Symétrie droite-gauche : $\int_0^{s_c} ds \cos \phi = - \int_{s_c}^{\pi R} ds \cos \tilde{\phi} = b \sin \theta_c$,
4. Nouveau point de contact récipient-tige : $\int_0^{s_c} ds \sin \phi = - \int_{s_c}^{\pi R} ds \sin \tilde{\phi} = -b(1 + \cos \theta_c)$,
5. Continuité de l'angle : $\phi(s_c) = \tilde{\phi}(s_c)$,
6. Équilibre des forces : $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} [\dot{\tilde{\kappa}}(s_c + \eta) - \dot{\kappa}(s_c - \eta)] = - \frac{\dot{\tilde{\kappa}}(\pi R) + \dot{\kappa}(0)}{\cos \theta_c}$.

On trouve que la partie supérieure se rapproche de plus en plus du récipient au fur et à mesure que la tige grandit. Pour $\epsilon \approx 0.4$, elle finit par entrer partout, au même instant, en contact avec le récipient. On retrouve alors un contact linéique entre la tige et le récipient.

3.5 Contact linéique - Type V

Ce type de configurations ne présente maintenant plus qu'une seule partie libre. Logiquement, on retrouve les mêmes conditions aux bords que pour les configurations de type I plus le troisième contact sur l'axe de symétrie. La condition 3 de la partie 3.1 est simplement remplacée par une condition comme la 4 de la partie 3.4 pour tenir compte de ce contact ponctuel. De même, la pression extérieure sur une région de contact est donnée localement par :

$$k_c = \frac{B}{b \sin \theta_c} [\dot{\kappa}(\pi R) - \cos \theta_c \dot{\kappa}(s_c)] \quad (11)$$

On continue à faire grandir la tige jusqu'à ce qu'elle présente un deuxième point de contact avec elle-même. C'est la forme finale proposée sur la figure 1.

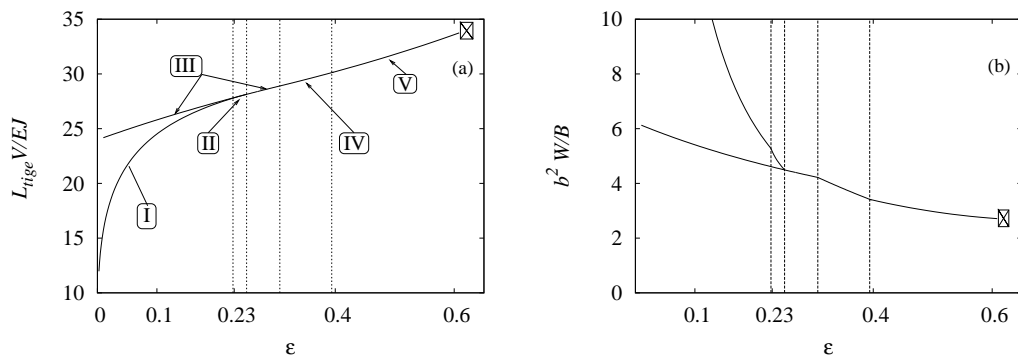


Fig. 2. (a) Énergie élastique V de la tige adimensionnée par la longueur totale. (b) Force extérieure globale W adimensionnée par le rayon b du cylindre. Les barres verticales pointillées servent à délimiter les domaines d'existence des différentes phases. La croix signale la fin de la branche quand la tige présente deux auto-contacts.

4 Perspectives

Ce travail permet de comprendre et de caractériser en détail la formation des premiers plis dans un cas particulier de papier froissé cylindrique à deux dimensions. En restant attentifs à la gestion des conditions aux bords, déjà non-triviales, nous avons pu déterminer la forme des plis à partir d'équations exactes. Nous nous dirigeons maintenant vers l'étude de régimes non-symétriques à grands confinements où cette approche n'est plus possible. L'étude de tels régimes reste envisageable en combinant simulations numériques et concepts issus de la physique statistique.

Références

1. D. L. BLAIR, A. KUDROLLI, The geometry of crumpled paper, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 166107 (2005).
2. L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ, Theory of elasticity 3rd ed. (Butterworth-Heinemann, London 1997)
3. P. PATRÍCIO, W. KRAUTH, Numerical solutions of the von-Kármán equations for a thin plate, *International Journal of Modern Physics C*, **8**, 427-434 (1997).
4. M. BEN AMAR, Y. POMEAU, Crumpled paper, *Proc. R. Soc. A*, **453**, 729-55 (1997).
5. A. LOBKOVSKY, S. GENTGES, H. LI, D. MORSE, T. WITTEN, Scaling properties of stretching ridges in a crumpled elastic sheet, *Science*, **270**, 1482-84 (1995).
6. E. CERDA, L. MAHADEVAN, Confined developable elastic surfaces : cylinders, cones and the *Elastica*, *Proc. R. Soc. A*, **461**, 671-700 (2005).
7. A. E. LOVE, A treatise on the mathematical theory of elasticity (Dover, New-York 1944).