

La diffraction non linéaire des ondes de choc acoustiques

F. Coulouvrat¹, R. Marchiano¹, B. Sambandam¹, & J.-L. Thomas²

¹ Laboratoire de Modélisation en Mécanique (UMR CNRS 7607), Université Pierre et Marie Curie, PARIS

² Institut des NanoSciences de Paris (UMR CNRS 7588), Université Pierre et Marie Curie, PARIS

coulouvr@ccr.jussieu.fr

Résumé. Les ondes acoustiques dans les fluides classiques (air, eau) étant non dispersives et faiblement dissipatives, les non-linéarités conduisent à la formation d'ondes de choc (d'amplitude faible). Les exemples sont nombreux, aussi bien en acoustique aérienne (tonnerre, bang sonique, bruit des moteurs d'avion...) que pour les ultrasons dans l'eau (notamment en imagerie et thérapie médicales). Si les ondes planes sont bien connues, les phénomènes de diffraction non linéaire restent à appréhender systématiquement. L'objectif est ici d'étudier quatre cas de diffraction non linéaire, et de d'observer des comportements spécifiques aux ondes de choc qui viennent modifier les lois bien connues de la diffraction linéaire. Ce sont respectivement : 1) la diffraction de Fresnel par un écran, 2) la réflexion d'une onde plane sur une paroi rigide (lois de Snell-Descartes), et la focalisation sur des caustiques, respectivement de type 3) pli (caustique d'Airy) ou 4) cuspidée (caustique de Pearcey).

Abstract. Acoustical waves in classical fluids (air, water) being non dispersive and weakly dissipative, nonlinearities lead to the formation of shock waves (of small amplitude). Examples are numerous, for audible acoustics (thunder, sonic boom, aircraft noise...) as well as for ultrasounds in water (especially for medical imaging and therapy). If nonlinear plane waves are well-known, nonlinear diffraction phenomena remain to be investigated systematically. The objective here is to study four cases of nonlinear diffraction, where behaviours specific for weak shock waves are observed which modify well-known laws of linear diffraction. These four cases are respectively : 1) Fresnel diffraction by a screen, 2) Snell-Descartes laws of reflexion on a rigid boundary, and focusing on caustics of type respectively 3) fold (Airy caustics) or 4) cusp (Pearcey caustics).

1 Introduction

Tous ces cas, à l'exception de la caustique pli, sont modélisés par une approximation de type paraxial dite équation KZ (équation de type hyperbolique du point de vue mathématique) ([17] [8]) :

$$\frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 p_a}{\partial \tau \partial x} - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (p_a^2) = \frac{\partial^2 p_a}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Ici, x est la variable d'espace dans la direction principale de propagation, $\tau = t - x/c_0$ le temps retardé de propagation d'une onde plane dans cette direction, y la direction transverse, p_a la pression acoustique, c_0 la vitesse du son linéaire, ρ_0 la densité du milieu, et β le coefficient thermodynamique (d'ordre 1) mesurant la non-linéarité du milieu. Le premier terme au membre de gauche décrit l'évolution de l'onde à mesure qu'elle s'éloigne de la source, et le second les non-linéarités quadratiques. Celles-ci sont dues au fait que, pour une onde plane, la vitesse de phase de l'onde c dépend de l'amplitude *instantanée* $p_a(x, y, t)$ sous la forme $c = c_0 + \frac{\beta p_a}{\rho_0 c_0}$. Enfin, le second membre de Eq.1 décrit la diffraction dans la direction transverse. Dans le cas linéaire, Eq.1 est l'approximation paraxiale ou parabolique usuelle de l'équation des ondes, valable lorsque la propagation a lieu principalement dans la direction x . Cette approximation est bien vérifiée dans les cas étudiés, la direction principale étant fixée par celle de l'onde plane incidente sur l'écran pour la diffraction de Fresnel, par la direction tangente à la surface pour la réflexion rasante et par le rayon tangent à la pointe de la caustique cuspidée.

2 Dispositif expérimental

En régime linéaire, les différents problèmes abordés sont des problèmes de diffraction classique et ne sont pas spécifiques à l'acoustique. Ils peuvent être observés naturellement dans différents domaines des ondes : acoustique, optique, ondes de gravité, etc ... L'acoustique ultras-sonore dispose néanmoins, pour les étudier, de technologies avancées comme la technique de synthèse de champ par filtre inverse [14] permettant de synthétiser précisément des champs complexes par un contrôle précis de l'amplitude et de la phase du champ sur un domaine spatial donné, la phase étant un paramètre critique. Cette technique repose sur la connaissance de l'opérateur de propagation reliant les sources acoustiques et les points (appelés points de contrôle) constituant le domaine spatial où on veut synthétiser un champ donné. Une fois l'opérateur de propagation mesuré, il est numériquement inversé ce qui permet de déterminer les signaux à émettre par les sources acoustiques pour réaliser au mieux (au sens des moindres carrés) le champ à synthétiser sur les points de contrôle. Celui-ci dépend bien évidemment du problème physique étudié, soit ici la fonction d'Airy (solution linéaire de la caustique pli), la fonction de Pearcey (solution linéaire du problème de la caustique cuspidée), ou simplement un front d'onde plan à incidence donnée (pour la réflexion de Mach). Pour étudier le régime non linéaire, il suffit alors d'émettre sur chaque transducteur les signaux calculés en régime linéaire en multipliant d'un facteur 20 l'amplitude d'émission. On assiste alors à l'apparition de phénomènes non-linéaires (génération d'harmoniques, formation de chocs) couplés à la diffraction inhérente à chacun de ses problèmes physiques.

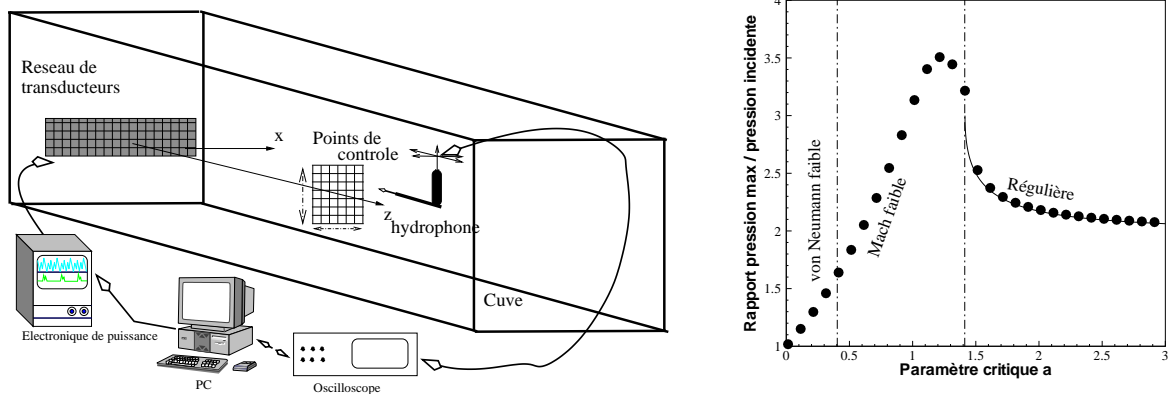


Fig.1. A gauche : schéma du dispositif expérimental - A droite : réflexion d'une onde rasante, amplitude maximale à la paroi normalisée par l'amplitude incidente en fonction du paramètre critique (courbe continue : théorie des chocs faibles, cercles noirs : simulation numérique)

Le dispositif expérimental (figure 1) utilisé a été développé dans cette double optique : synthèse de champ et puissance acoustique suffisante l'observation des ondes de choc. Il se compose d'un réseau de 128 transducteurs piézoélectriques dont la fréquence centrale est 1MHz (soit une longueur d'onde de 1.5 mm dans l'eau). Chaque transducteur est piloté individuellement par une électronique de puissance permettant de contrôler la forme, l'amplitude et la phase des signaux émis. Le réseau de transducteurs associé à l'électronique de puissance permet de générer un front d'onde plan d'une amplitude maximale de 5 bars. Ce niveau d'émission correspond à une distance de formation d'onde de choc de 30 cm environ (la distance de choc d'une onde plane est égale à $1/k\beta M$ [8], où k est le nombre d'onde et M est le nombre de Mach acoustique). Le champ acoustique est mesuré avec un hydrophone large bande (1-50 MHz) monté sur une système de 3 axes motorisés permettant un balayage 3D du champ de pression.

3 Diffraction de Fresnel non linéaire

Nous présentons une étude théorique et numérique [5] de la diffraction d'une onde de choc acoustique par un écran au voisinage de la ligne séparant la zone éclairée de la zone d'ombre, qui est une ligne de

singularité (discontinuité du champ) en acoustique géométrique. Cette singularité peut être levée par une description asymptotique de type couche limite, le champ y étant décrit par l'équation KZ. En régime linéaire, des solutions semblables existent, décrivant une couche limite dont l'épaisseur croît comme la racine carrée de la distance. La solution de base est donnée par les fonctions de Fresnel. En non linéaire, il est possible de montrer que des solutions auto-semblables existent également, mais cette fois l'épaisseur de la couche limite croît en fonction de la distance suivant une loi qui dépend de la forme temporelle du signal : puissance $1/2$ pour une dent-de-scie périodique mais $3/4$ pour une onde en "N" et loi linéaire pour un signal marche. Ces lois de puissance spécifiques s'expliquent théoriquement par le contenu spectral de chaque signal et son évolution non linéaire. Elles montrent que des chocs transitoires pénètrent plus profondément dans la zone d'ombre que des ondes périodiques ou linéaires. Ces résultats théoriques ont été confirmés par des simulations numériques réalisées à l'aide d'un code de résolution de l'équation KZ. Ils constituent un premier exemple intéressant de loi de diffraction classique (ici, de Fresnel) fortement modifiée en régime non linéaire.

4 Réflexion rasante non linéaire

Nous étudions [13] dans un second temps la réflexion rasante (angle d'incidence proche de 90°) des ondes de choc acoustiques sur une surface parfaitement plane et rigide. Pour les ondes de choc fortes, il existe deux types de réflexion, la réflexion régulière (à deux chocs) et la réflexion de Mach (à trois chocs) [1]. Toutefois, ce schéma est bien connu pour n'être plus valable pour les chocs faibles, tels qu'observés en acoustique, ce qui est connu comme le paradoxe de von Neumann [12]. Dans le cas linéaire, von Neumann a souligné un second paradoxe, suivant lequel les lois de Snell-Descartes linéaires sont singulières car valables à tout angle sauf l'incidence parfaitement rasante. Dans notre étude, trois types de signaux acoustiques sont étudiés : le cas idéal d'un choc pur, pour lequel il existe une solution auto-semblable, et les cas d'une onde en N ou d'une dent-de-scie périodique, correspondant à des signaux réalistes du point de vue acoustique. L'adimensionnement de Eq.1 fait apparaître le paramètre de contrôle clé $a = \sin\theta/\sqrt{\beta M}$ où $\pi/2 - \theta$ est l'angle d'incidence [3]. Le phénomène de réflexion non linéaire se produit pour des paramètres critiques de l'ordre de l'unité, soit, pour les valeurs usuelles de 10^{-3} du nombre Mach, des angles θ de l'ordre de quelques degrés. Pour une onde de choc pure, il est possible de vérifier que la solution du problème est auto-semblable (propriété également satisfaite par la solution numérique), et ne dépend donc que de la valeur de ce paramètre de contrôle. Ceci permet d'identifier quatre régimes différents de réflexion. Les lois de Snell-Descartes (régime n°1) ne sont retrouvées que pour les valeurs très grandes du paramètre critique (en pratique $a > 5$). Pour $a > \sqrt{2}$ a lieu la réflexion dite régulière (régime n°2), pour laquelle les ondes de choc incidente et réfléchie sont en contact sur la paroi, mais l'angle de réflexion est plus petit que l'angle d'incidence, et l'amplitude de l'onde réfléchie plus grande. En deçà se produit la réflexion dite irrégulière, ou de Mach généralisée (régime n°3), selon laquelle les ondes de choc incidente et réfléchie sont en contact (au point triple) à une distance finie de la paroi et connectées à celle-ci par une troisième onde de choc dite choc de Mach (Mach stem). Il est à noter toutefois que pour les chocs faibles, au contraire des chocs forts, le choc de Mach et le choc réfléchi sont de courbure non nulle et la pression en aval du choc réfléchi n'est pas constante (c'est pourquoi l'on parle de réflexion de Mach faible). Pour des valeurs plus faibles encore du paramètre critique ($a < 0.4$ environ), l'onde choc réfléchie disparaît complètement, on n'observe plus alors que la courbure du front d'onde incident et une compression localisée en amont de celle-ci. C'est un nouveau régime de réflexion (régime n°4), jamais décrit à notre connaissance dans la littérature, et que nous avons dénommé "réflexion de von Neumann faible". La succession de ces différents régimes est illustrée par la Fig.1, qui montre l'amplitude maximale du champ de pression sur la paroi, normalisée par l'amplitude de l'onde incidente, en fonction du paramètre critique. Aux grands angles on retrouve la loi de Snell-Descartes, avec un coefficient de réflexion 1 et donc un doublement de la pression à la paroi. En diminuant la valeur du paramètre critique (par exemple en s'approchant de l'incidence rasante), on s'écarte progressivement des lois linéaires et l'amplitude augmente. La simulation numérique est en parfait accord avec la valeur théorique donnée par la théorie des chocs faibles. En-deçà de la valeur critique $\sqrt{2}$, la réflexion régulière n'est plus valable, la réflexion de Mach faible se produit et l'amplitude de la surpression à la paroi augmente encore jusqu'à un maximum, avant de décroître. Cette

décroissance continue avec le régime de la réflexion de von Neumann, jusqu'à la valeur 1 en incidence totalement rasante : il n'y a plus d'onde réfléchie, l'onde incidente se propageant de façon parfaitement parallèle à la paroi sans interagir avec celle-ci. Cette courbe de transition continue suivant les valeurs du paramètre critique permet ainsi de résoudre le paradoxe acoustique de von Neumann et d'assurer une transition continue entre les lois de Descartes et l'incidence parfaitement rasante. Cette transition est toutefois non linéaire et non monotone, le rôle des non-linéarités étant maximal pour la réflexion de Mach faible. Pour des ondes de choc réalistes (chocs périodiques résultant d'un train d'onde, onde en "N" comme le bang sonique), les mêmes quatre régimes de réflexion existent. Toutefois, une onde de choc étant dissipative, l'énergie finie de l'onde diminue et par conséquent l'amplitude du choc et la valeur locale du paramètre critique au fur et à mesure que l'on se déplace le long de la plaque. Aussi ne peut-il exister de solutions auto-semblables, et les différents régimes décrits ci-dessus sont-ils transitoires. Quelque soit le régime initial observé à l'extrémité de la plaque, suffisamment loin l'amplitude de l'onde incidente aura diminué pour tendre vers la réflexion linéaire de Snell-Descartes. Toutefois cette évolution est lente (de l'ordre de la dizaine de distance de choc) et les différents régimes peuvent être observés sans difficulté, numériquement et également du point de vue expérimental, en utilisant le dispositif décrit ci-dessus. Afin d'éliminer l'influence des propriétés matérielles d'un réflecteur matériel (impédance finie, élasticité) et de l'état de surface (rugosité), la condition de paroi parfaitement rigide a été remplacée par une condition (mathématiquement équivalente) de symétrie à la paroi $\partial p_a / \partial z = 0$. Une onde avec un front d'onde composé de deux demi-plans en dièdre a été synthétisée sur une ligne transverse donnée (correspondant à l'extrémité de la paroi rigide $x = 0$). Le champ est ensuite émis en régime non linéaire et mesuré expérimentalement à différentes positions $x > 0$. Suivant la valeur de l'angle du dièdre, on observe clairement les différents régimes de réflexion attendus théoriquement (figure 2) : la réflexion de von Neumann faible pour l'angle le plus petit, la réflexion de Mach faible pour un angle "moyen" et la réflexion régulière pour l'angle le plus élevé. Ceci démontre que les lois de réflexion de Snell-Descartes sont violées pour des ondes de choc acoustiques d'amplitude très faible en incidence rasante, et que la réflexion de telles ondes est alors intrinsèquement gouvernée par des lois non linéaires.

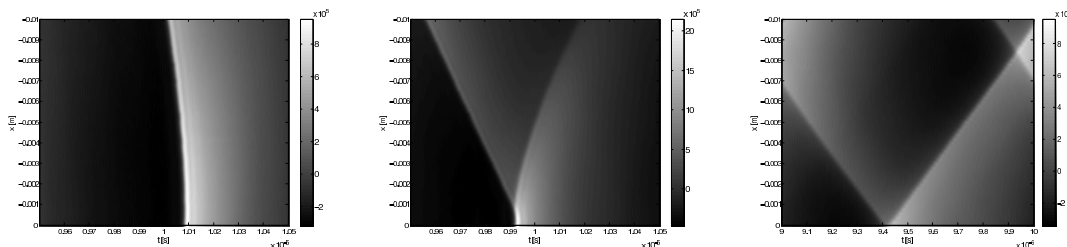


Fig.2. Mesure expérimentale de la réflexion non linéaire d'une onde de choc : champs spatio temporels — à gauche réflexion de von Neumann ($\theta = 1^\circ$), au centre réflexion de Mach ($\theta = 3^\circ$), à droite réflexion régulière ($\theta = 5^\circ$). Les pressions sont en niveau de gris.

5 Focalisation d'ondes de choc sur des caustiques

Les caustiques sont des surfaces d'amplification du champ acoustique. Selon la théorie des catastrophes [15],[2] elles peuvent être classifiées selon leur géométrie, les deux plus simples étant respectivement la caustique "pli" et la caustique "cuspidée". Dans l'approximation de l'acoustique géométrique (théorie des rayons), qui néglige la diffraction, ces surfaces sont des singularités d'amplitude. Pour lever cette singularité en régime linéaire, il est nécessaire d'introduire la diffraction. La caustique "pli" correspond à la focalisation d'un front d'onde sur une surface régulière de l'espace. Cette surface divise l'espace en deux zones distinctes, une zone insonnée où les rayons sont tangents à la caustique et une zone de silence où il n'y a pas de signal. La caustique pli est ainsi dénommée en raison de la pliure du front d'ondes que la focalisation engendre. La figure de diffraction associée en régime linéaire à une telle caustique est

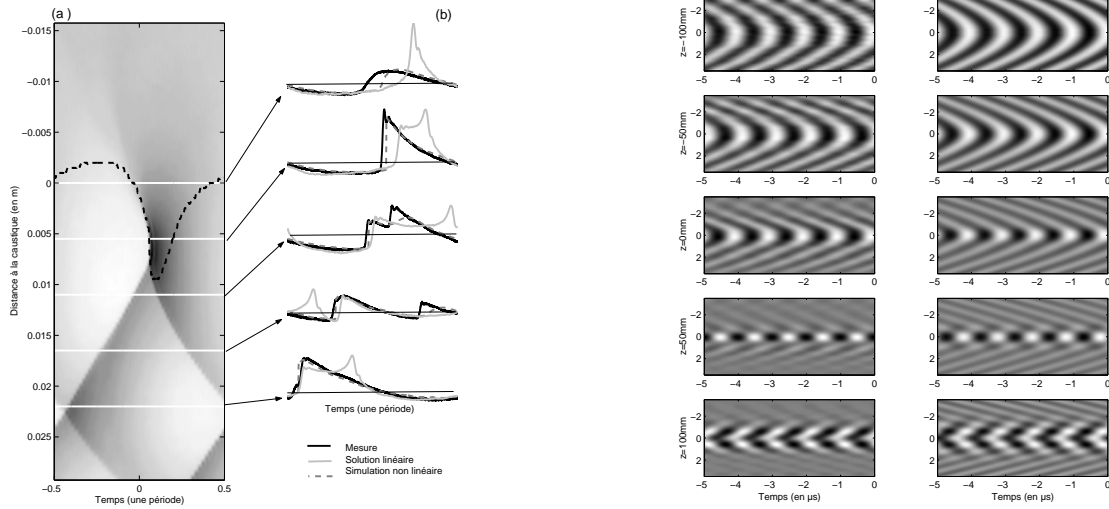


Fig.3. Focalisation d'ondes de choc sur des caustiques 'pli' et 'cuspidée' - Mesure expérimentale du champ de pression spatio-temporel focalisé sur une caustique pli (1ère colonne, en pointillé la ligne sonique séparant les domaines elliptique et hyperbolique) et comparaison avec des simulations numériques linéaire et non linéaire (2ème colonne) - Simulations numériques du champ de pression spatio-temporel focalisé sur une caustique cuspidée (3ème colonne) et comparaison avec les mesures (4ème colonne). Les pressions sont en niveau de gris.

la fonction d'Airy. La caustique cuspidée quant à elle est caractérisée par un point de rebroussement et un front d'onde en forme de queue d'aronde. La figure de diffraction associée est la fonction de Pearcey. Lorsque les ondes qui focalisent sur une caustique sont des ondes de choc, la modélisation précédente tombe à nouveau en défaut car une nouvelle singularité d'amplitude apparaît. Il est alors nécessaire d'introduire un mécanisme physique limitateur sous la forme de non-linéarités locales. En prenant en compte celles-ci, le problème de la focalisation d'ondes de choc sur une caustique 'pli' peut être modélisé par l'équation de Tricomi non linéaire [7]. Elle permet notamment d'établir une loi de similitude non linéaire selon laquelle l'amplitude du choc focalisé varie comme la puissance $4/5$ de celle du choc loin de la caustique. La nature de cette équation non linéaire, de type mixte hyperbolique / elliptique a longtermis été un obstacle à la mise en oeuvre d'une simulation numérique du phénomène. Le développement récent d'un code de simulation numérique [9] a permis d'avoir un outil performant de résolution afin de vérifier la théorie de Guiraud. Pour cela les résultats numériques ont été comparés à une expérience de focalisation d'ondes de choc sur une caustique pli [10]. Le dimensionnement de l'expérience a été choisi pour simuler à l'échelle ($1/100\ 000$ e) la focalisation du bang sonique d'un avion supersonique en accélération. A nouveau, la technique du filtre inverse a été utilisée pour imposer la fonction d'Airy dans une région de l'espace. Les signaux émis par les transducteurs ont ensuite été amplifiés pour provoquer l'apparition des effets non linéaires lors de la propagation. La figure 3 fait apparaître (1ère colonne) le champ de pression spatio-temporel (abscisses : temps, ordonnées : espace) sur une période du signal acoustique au voisinage de la caustique. Les zones de transitions rapides blanc/noir sont caractéristiques de la présence d'ondes de choc. Ces ondes de choc permettent de visualiser très nettement le front d'onde dont la forme est bien celle attendue d'un front d'onde plié. La ligne noire pointillée est appelée ligne sonique. Elle sépare la zone elliptique (au dessus) où l'on constate que le champ décroît rapidement (pas de choc dans cette zone) et la zone hyperbolique (en dessous) dans laquelle il y a propagation des chocs. La 2ème colonne présente 5 signaux temporels à différentes distances de la caustique. Sur les signaux expérimentaux (trait noir plein) ont été superposés les signaux simulés numériquement dans le cadre de la théorie linéaire (trait gris clair plein) et de la théorie non linéaire (trait gris foncé pointillé). Il n'y a pas d'accord entre l'expérience et la simulation linéaire mais accord très satisfaisant (forme temporelle, amplitude et phase des chocs) avec la

simulation non linéaire. Ceci démontre le rôle essentiel joué localement par les non-linéarités, même sur des distances très petites comparées à la distance de choc.

La focalisation d'ondes de choc sur une caustique cuspidée peut être modélisée par l'équation KZ [6] et [4]. Une loi de similitude à la Guiraud peut également être établie, mais avec une puissance $2/3$ cette fois. Afin de valider le modèle théorique et le code numérique, une confrontation avec des résultats expérimentaux a été entreprise [11]. Le protocole expérimental est similaire à celui décrit précédemment. En régime linéaire, la technique de synthèse par filtre inverse a été utilisée pour synthétiser la fonction de Pearcey. Puis, les signaux émis par les transducteurs ont été amplifiés afin de faire apparaître les effets non linéaires lors de la propagation. La figure 3 montre le champ de pression spatio-temporel simulé (3ème colonne) et mesuré expérimentalement (4ème colonne) à différentes distances de la pointe de la caustique (de haut en bas $z = -100mm$, $z = -50mm$, $z = 0mm$, $z = 50mm$, $z = 100mm$). L'accord entre les deux séries de figures est très bon. Les formes spatiales ainsi que temporelles du champ de pression sont bien retrouvées pour chacune des différentes distances. La focalisation a lieu entre $z = 0mm$ et $z = 50mm$. Avant cette distance le front d'ondes est convergent mais ne présente pas de singularité. Après la focalisation, la forme du front d'ondes est plus complexe. Cependant la structure en queue d'aronde n'est pas clairement identifiable. Les comparaisons quantitatives montrent également un bon accord sur la forme et l'amplitude des signaux temporels. On observe notamment un coefficient d'amplification de l'ordre de 9 pour un choc focalisant sur une caustique cuspidée, contre 3 pour une caustique simple, valeurs en accord avec les mesures de "superbang" sonique réalisées en vol [16].

Références

1. G. BEN-DOR, *Shock Wave Reflection Phenomena*, Springer, New York (1992).
2. M. V. BERRY, Waves and Thom's theorem, *Adv. Phys.*, **25**, 1-26 (1976).
3. M. BRIO, J. K. HUNTER, Mach reflection for the two-dimensional Burgers' equation, *Physica D*, **60**, 194-207 (1992).
4. F. COULOUVRAT, Focusing of weak acoustic shock waves at a caustic cusp, *Wave Motion*, **32**, 233-245 (2000).
5. F. COULOUVRAT, R. MARCHIANO, Nonlinear Fresnel diffraction of weak shock waves, *J. Acoust. Soc. Am.*, **114**, 1749-1757 (2003).
6. M. S. CRAMER, A. R. SEEBASS, Focusing of weak shock waves at an arête, *J. Fluid Mech.*, **88**, 209-222 (1978).
7. J.-P. GUIRAUD, Acoustique géométrique, bruit balistique des avions supersoniques et focalisation, *J. Mécanique*, **4**, 215-267 (1965).
8. M. F. HAMILTON, D. T. BLACKSTOCK, *Nonlinear Acoustics*, Academic Press, San Diego (1998).
9. R. MARCHIANO, F. COULOUVRAT, R. GRENON, Numerical simulation of shock wave focusing at fold caustics, with application to sonic boom, *J. Acoust. Soc. Am.*, **114**, 1758-1771 (2003).
10. R. MARCHIANO, J.-L. THOMAS, F. COULOUVRAT, Experimental simulation of supersonic superboom in a water tank : nonlinear focusing of weak shock waves at a fold caustic, *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 184301 (2005).
11. R. MARCHIANO, F. COULOUVRAT, J.-L. THOMAS, Nonlinear focusing of acoustic shock waves at a caustic cusp, *J. Acoust. Soc. Am.*, **117**, 566-577 (2005).
12. J. VON NEUMANN, *Oblique reflection of shocks (in John von Neumann collected work, vol. 6)*, Pergamon, New York, 238-299 (1963).
13. B. SAMBANDAM, F. COULOUVRAT, R. MARCHIANO, Nonlinear reflection of grazing acoustical shock waves : unsteady transition from von Neumann to Mach to Snell-Descartes, *J. Fluid Mech.*, submitted (2005).
14. M. TANTER, J.-L. THOMAS, M. FINK, Time reversal and inverse filter, *J. Acoust. Soc. Am.*, **108**, 223-234 (1998).
15. R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse* Benjamin, Reading (1972).
16. J.-C. WANNER, J. VALLÉE, C. VIVIER, R. THÉRY, Theoretical and experimental studies of the focus of sonic booms, *J. Acoust. Soc. Am.*, **52**, 13-22 (1972).
17. E. A. ZABOLOTSKAYA, R. V. KHOKHLOV, Quasi-plane waves in the non-linear acoustics of confined beams, *Sov. Phys. Acoust.*, **15**, 35-40 (1969).