

# Solitons spatiaux dissipatifs dans des résonateurs optiques modulés : effets de résonances

M. Le Berre<sup>1</sup>, E. Ressayre<sup>1</sup>, M. Taki<sup>2</sup>, S. Coulibaly<sup>2</sup> and M. Tlidi<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Photophysique moléculaire, Bat. 210, Université de Paris Sud, 91 405 Orsay cedex

<sup>2</sup> PHLAM, Université de Lille, Villeneuve d'Ascq

<sup>3</sup> Laboratoire d'Optique nonlinéaire, ULB, Bruxelles, Belgique

[martine.le-berre@ppm.u-psud.fr](mailto:martine.le-berre@ppm.u-psud.fr)

**Résumé.** La modulation périodique d'un paramètre spatial, en une dimension, est étudié pour deux résonateurs optiques avec absorbant saturable, le laser et l'oscillateur paramétrique dégénéré, qui présentent des solutions localisées, ou solitons, de profil spatial symétriques et asymétriques, respectivement, avec des ailes oscillantes. On observe une amplification de l'énergie du soliton lorsque la fréquence du modulation est respectivement une harmonique, ou une sous-harmonique, de celle de l'aile du soliton.

**Abstract.** Under one dimensional transverse periodic modulation, two optical cavities with saturable absorber are studied, (i) the laser, and (ii) the degenerate optical parametric oscillator, which display both localized solutions with oscillating tails of symmetrical and asymmetrical spatial profiles, respectively. When the frequency of the modulation is twice (i), or half (ii) the spatial frequency of the oscillating tail, strong modifications of the spatial profiles are observed.

## 1 Introduction

Des solitons, en une dimension transverse, ont été étudiés récemment dans des systèmes nonlinéaires avec modulation périodique d'un paramètre. Les premières études concernaient des systèmes conservatifs (cristaux photoniques, condensation de Bose, etc..) régis par l'équation de Schrodinger nonlinéaire où des solitons de Bragg (ou de bande interdite) ont été analysés [1]. Ces solitons sont des solutions stationnaires de l'équation, de la forme  $A(x, t) = \Phi(x)e^{i\mu t}$ , où la fonction réelle  $\Phi(x)$  décroît à l'infini et où la fréquence  $\mu$  appartient à une des bandes interdites du spectre de l'équation linéaire. Dans ce cas il y a deux familles de solitons que l'on peut distinguer par la valeur de la fréquence spatiale  $k_0$  de l'onde porteuse (i) les solitons normaux, avec  $k_0 = 0$ , dont le profil spatial est centré sur un puits de potentiel, et (ii) les solitons décalés, avec  $k_0 = k_m/2$ , dont le profil spatial est centré sur un maximum du potentiel. Très peu d'études ont été menées pour les solitons de systèmes périodiques dissipatifs, à l'exception du travail de Staliunas [3] qui a montré l'existence d'une grande variété de solitons dans le laser avec absorbant saturable (LAS) : non seulement des solitons normaux et décalés, mais aussi une 3ème famille dite "de milieu de bande", dont le spectre spatial est centré sur une fréquence porteuse  $k_0$  intermédiaire entre 0 et  $k_m/2$ . Une analyse linéaire simplifiée incluant les deux modes spatiaux de nombre d'onde  $k_0$  et  $k_m$  permet de déduire la largeur des solitons. Dans la limite des grandes valeurs de  $k_m$ , ce travail montre ainsi l'existence de solitons très étroits, ce qui présente un avantage considérable pour des applications potentielles au stockage de l'information. Nous considérons ici un aspect qui n'a pas été abordé dans cette dernière étude, bien qu'il concerne, outre le LAS, de nombreux systèmes dissipatifs. Nous étudions l'effet du forçage multiplicatif sur les structures localisées présentant des ailes oscillantes, i.e. dont la solution s'accroche sur sa base par des oscillations amorties. La présence, dans le spectre, de la fréquence d'accrochage  $k_p$  va profondément modifier les caractéristiques des solutions dans le domaine  $k_m \sim k_p$ . Nous mettons en évidence deux comportements différents selon que le soliton est mobile ou fixe, en illustrant notre propos par deux exemples, les solitons immobiles du LAS, et les solitons mobiles asymétriques de l'oscillateur paramétrique dégénéré avec absorbant saturable (DOPOAS).

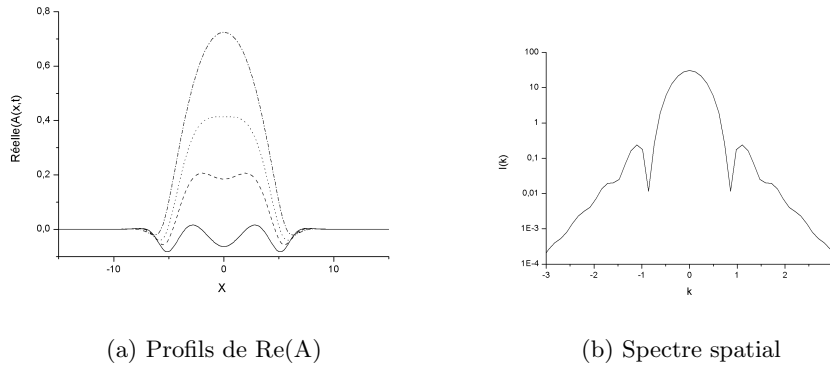
## 2 Solitons symétriques du laser

Dans l'approximation de champ moyen, l'amplitude complexe du champ électromagnétique du LAS obéit à l'équation

$$\partial_t A = \left( \frac{D_0}{1 + |A|^2} - 1 - \frac{\alpha_0}{1 + s|A|^2} + (g + id)\partial_{xx} + iV(x) \right) A \quad (1)$$

contenant respectivement les termes de gain, pertes linéaire et saturable, diffusion, diffraction, et de modulation périodique de l'indice de réfraction suivant la variable transverse  $V(x) = m(e^{ik_m x} + e^{-ik_m x})$ .

### 2.1 Solitons sans modulation



**Fig.1.** LAS non modulé pour  $m = 0$ ,  $D_0 = 1.65$ ,  $\alpha = 5$ ,  $s = 100$ ,  $d = 1$ ,  $g = 10^{-4}$

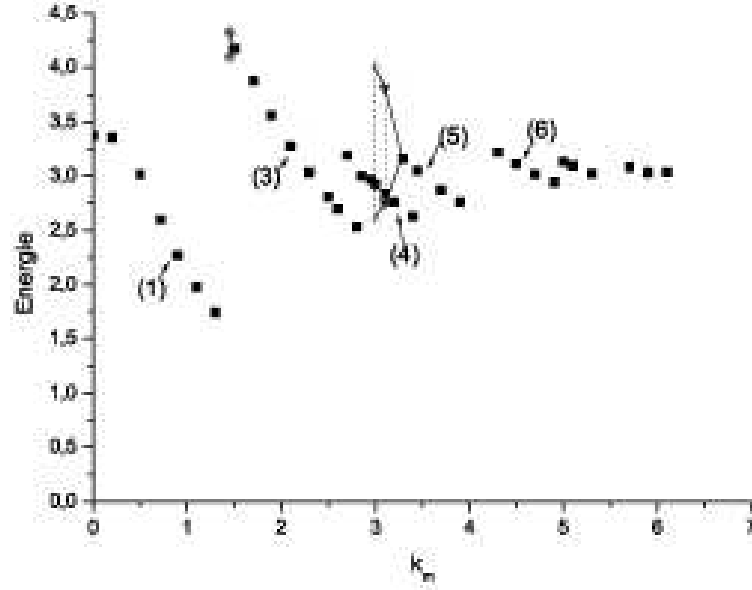
Des solitons ont été reportés dans ce système bistable, en absence de modulation [2],  $m = 0$ . La solution est de la forme  $A(x, t) = \Phi(x)e^{i\omega t}$ , où  $\phi(x)$  tend vers zéro à l'infini, et vers la solution homogène stable en  $x = 0$ . Si l'intensité décroît de façon monotone, la fonction complexe  $\Phi(x)$  présente des oscillations au voisinage de la base, c'est-à-dire lorsque la partie réelle ou imaginaire de  $\Phi(x)$  est voisine de zéro, cf. Fig. 1, où la partie réelle de  $A(x, t)$  est représentée sur 1/4 de période, aux instants  $t = n\pi t/6\omega$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ . Le spectre spatial contient un pic central et deux pics latéraux centrés sur les nombres d'onde  $\pm k_p$ . La valeur de  $k_p$  est en accord qualitatif avec les prédictions de l'analyse linéaire au voisinage de la solution triviale. En supposant  $A = e^{-i\omega t + Kx - ik_{p,lin}x}$ , on obtient  $k_{p,lin}^2 = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2 + (D_0 - 1 - \alpha_0)^2}$ . Précisons que si la valeur numérique de  $k_p$  est très proche de  $k_{p,lin}$  au seuil d'existence du soliton, elle décroît lorsque son intensité augmente. En particulier dans le domaine où l'intensité devient oscillante, au-delà de la bifurcation de Hopf [2], on remarque que *les minima de  $k_p$  sont associés aux maxima de la largeur du soliton*. Les modulations spatiales observées entre les deux points d'accrochage du soliton sur sa base, sont analogues à celles d'une corde forcée dont on varierait la longueur. Cette propriété va se révéler être la clef pour comprendre la suite.

Bien que l'amplitude des modes latéraux soit 10 fois plus faible que celle du mode central, nous allons montrer qu'ils peuvent jouer un grand rôle lorsque le système est soumis à des modulations spatiales extérieures.

### 2.2 Solitons avec forçage spatial

Nous reportons ici l'effet des modulations sur les solitons normaux, i.e. émis suivant l'axe optique. Une évaluation de leur largeur a été proposée, basée sur une analyse linéaire bi-modale de l'équation (1) au

voisinage de  $A = 0$ . Bien que très simplifiée, cette analyse décrit qualitativement les effets d'élargissement et de rétrécissement des solitons lorsque le nombre d'onde  $k_m$  est très supérieur à la largeur du spectre spatial du soliton non modulé. En supposant  $A = e^{ik_0x}(A_0 + A_1e^{ik_mt})e^{-i\omega t}$ , les termes imaginaires du système couplé  $-i\omega A_{0,1} = -idk_{0,1}^2 A_{0,1} + imA_{1,0}$  conduisent à une relation de dispersion d'où l'on déduit que la largeur du soliton  $w_{sol}$  normal modulé est  $w_{sol} \propto \sqrt{d}(1 - f^2/2)$ , où  $f = 2m/(dk_m^2)$  est le contraste de modulation. La largeur d'un soliton normal modulé est donc légèrement réduite par rapport à celle d'un soliton non modulé, et indépendante du nombre d'onde  $k_m$ , si  $k_m \gg k_p$ . Nous montrons ici que

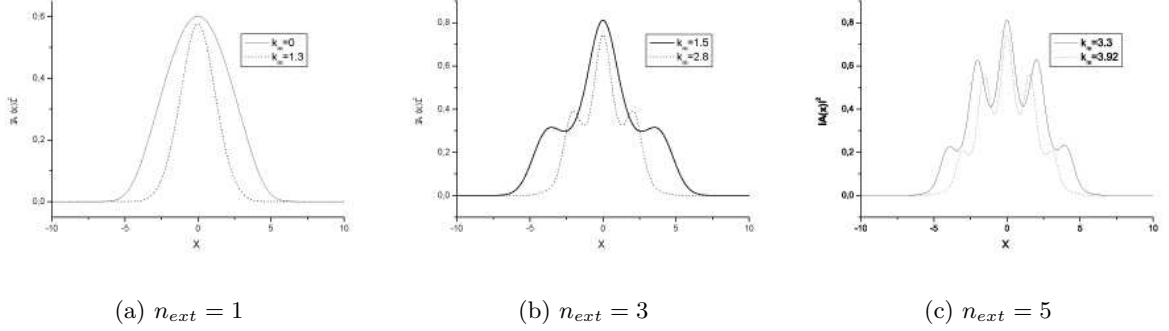


**Fig.2.** Energie du soliton modulé du LAS en fonction du nombre d'onde  $k_m$ , mêmes paramètres que ceux de la Fig. 1, sauf  $f = 0.15$

les caractéristiques du soliton dépendent fortement de  $k_m$  dans le domaine des "petits" nombre d'onde (de l'ordre de quelques  $k_p$ ). L'énergie  $\Xi = \int |A(x)|^2 dx$  du soliton modulé, est reporté Fig. 2, où chaque portion de courbe décroissante correspond à une forme particulière du profil de l'intensité, présentant un nombre constant d'extréma ( $n_{ext} = 1, 3, 4, 5, 6$ , indiqué sur la figure). On obtient des courbes analogues à celle de la Fig. 2 en reportant en ordonnée la largeur du soliton, ou encore les amplitudes des trois composantes spectrales, de nombre d'onde  $k = 0, \pm k_p$  et  $\pm k_m$  (excepté au voisinage de  $k_m \sim 0$  où l'on n'observe qu'un large pic central non différencié). Sur chaque domaine défini par  $n_{ext}$ , la décroissance de l'énergie en fonction de  $k_m$ , est due essentiellement à un rétrécissement du soliton, sa hauteur changeant peu, cf. Figs. 3 représentant les profils d'intensité aux extrémités des domaines pour  $n_{ext} = 1, 3, 5$ . Le rétrécissement spatial du soliton s'accompagne de l'augmentation du nombre d'onde  $k_p$ , comme dans le cas du soliton non modulé, cf. section 2.1. Le long des domaines qui présentent des maxima d'énergie,  $n_{ext} = 3, 5, 6$ , les nombres d'onde des 2 modes latéraux obéissent à la relation

$$k_m = Nk_p \quad (2)$$

avec respectivement  $N = 2, 3, 4$ . Pour  $N = 2$ , qui correspond au pic de résonance le plus intense, cette relation indique le blocage en phase des termes  $e^{ik_px}$  et  $e^{ik_mx}e^{-ik_px}$  de  $A_0(x)$  et  $A_0(x)V(x)$ , respectivement. Les pics de résonance correspondent aux valeurs inférieures de  $k_m$  le long de chaque domaine où la relation (2) est vérifiée.



**Fig.3.** Profils d'intensités des solitons modulés du LAS, aux extrémités des domaines (1),(3),(5) de la Fig.2

Notons que le soliton devient oscillant au voisinage des pics de résonances, l'énergie oscillant périodiquement entre les deux extrêmes indiqués en pointillés sur la Fig. 2, au voisinage de  $k_{m,res} \sim 1.5xN$ . Pour  $k_m$  grand, l'énergie devient indépendante de  $k_m$ , en accord avec l'étude de la Ref. [3].

### 3 Solitons asymétriques de l'oscillateur paramétrique

L'oscillateur paramétrique optique dégénéré avec absorbant saturable est un résonateur passif décrit par les deux équations couplées

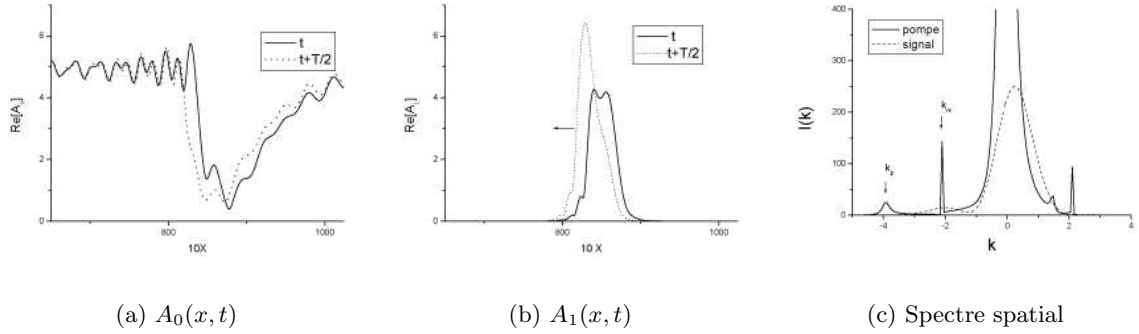
$$\partial_t A_0 = \gamma[E - (1 + i\Delta_0 + iV(x))A_0 - A_1^2] + \frac{i}{2}\partial_{xx}A_0 \quad (3)$$

$$\partial_t A_1 = \left[-(1 + i\Delta_1) - \frac{R}{1 + s|A_1|^2}\right]A_1 + A_0A_1^* + i\partial_{xx}A_1 \quad (4)$$

pour les amplitudes complexes  $A_{0,1}$  des champs pompe et signal aux fréquences  $\omega_0$  et  $\omega_0/2$  respectivement. Dans les équations (3)-(4),  $E$  est l'amplitude de la pompe externe,  $\gamma$  est le rapport de transmittivité des miroirs pour les champs pompe et signal, et nous supposons que seul le champ pompe subit la modulation spatiale périodique, le terme  $V(x)$  s'ajoutant au désaccord en fréquence  $\Delta_0$ .

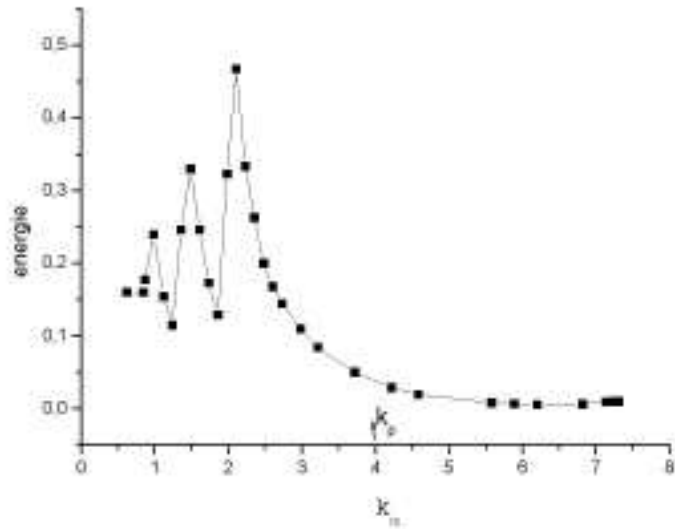
En absence de modulation, les équations (3)-(4) admettent des solutions localisées en régime bistable, la base étant la solution triviale  $\overline{A}_0 = E/(1 + i\gamma\Delta_0)$ ,  $\overline{A}_1 = 0$ . Quand la solution homogène non triviale est le siège d'une double instabilité de Hopf et de Turing, des solitons très intenses ont été reportés [4], qui deviennent asymétriques pour  $\gamma$  petit, et se propagent à vitesse constante. Le profil d'amplitude du champ pompe  $A_0(x - vt)$  est le plus remarquable par sa dissymétrie : il présente une aile raide s'accrochant sur la base par une modulation peu amortie de grand nombre d'onde,  $k_p$ , et une aile beaucoup plus large s'accrochant par une modulation de petit nombre d'onde à peine visible. Le spectre spatial du champ pompe est composé d'un pic central et d'un seul pic latéral bien distinct, signature de la modulation d'accrochage de grand nombre d'onde,  $k_p$ . Celui du champ signal présente également un pic central et un plus petit pic latéral de nombre d'onde  $k_p/2$ , signature de la nonlinearité, cf. équation (3). Cet accrochage dissymétrique a été expliqué par l'analyse linéaire au voisinage de la solution triviale stable, qui montre l'émergence de deux modes spatiaux d'égal amortissement et de nombre d'onde différents,  $k_{1,2} = \text{Re}[v \pm \sqrt{v^2 - 2\gamma(\Delta_0 - i)}]$ , soit  $k_p \simeq k_2 \simeq \gamma\Delta_0/v$  pour  $\gamma$  petit.

Précisons que, contrairement au cas du LAS, où les modulations de nombre d'onde  $k_p$  sont visibles entre les deux points d'accrochage du soliton sur sa base (Fig.1), ici elles sont clairement localisées autour du point d'accrochage, à gauche dans la Fig. 3 de la Ref. [4]-(b). Cette différence est due au fait qu'ici les parties réelles et imaginaires de  $A_{0,1}$  sont de grande amplitude et constantes dans le référentiel lié au soliton.



**Fig.4.** Profils des parties réelles des solitons mobiles, (a) pompe , et (b) signal, à deux instants décalés d'une demi-période. (c) Intensités spectrales des champs pompe (ligne) et signal (pointillé). Mêmes paramètres que ceux de la Fig. 5, et  $k_m = 1.5$

En présence de modulation extérieure du champ pompe, les équations (3)-(4) admettent encore des solutions de type soliton-asymétriques, qui se propagent sur la base de la solution triviale modulée,  $A_1 = 0, A_0 = \overline{A_0} + a_m \cos k_m x$  où la profondeur de modulation est  $\rho = \frac{a_m}{\overline{A_0}} = \frac{m}{[(1+(\Delta_0+k_m^2/2\gamma)^2)]^{1/2}}$ . Au cours de la propagation les solitons ondulent, i.e. différentes grandeurs comme les amplitudes  $A_{0,1}(x-vt)$ , les énergies  $\Xi_{0,1} = \int |A_{0,1}(x)|^2 dx$ , les intensités des composantes spectrales  $0, k_p, \pm k_m$  etc... oscillent périodiquement, avec la période spatiale  $2\pi/k_m$  et temporelle  $2\pi/vk_m$ , cf. Fig. 4 qui montre des profils  $|A_{0,1}(x)|$  décalés d'une demi-période.



**Fig.5.** Profondeur d'oscillation de l'énergie du soliton signal  $A_1(x, t)$  du DOPOAS, au cours de la propagation suivant  $x$ , pour  $E = 5.5, R = 5, S = 1, \Delta_{0,1} = 0.5, \gamma = 0.25$ , soit  $k_p = 3.95$  indiqué par la flèche.

L'amplitude de ces oscillations dépend fortement du nombre d'onde de la modulation, comme le montre la Fig. 5 où la variation de l'énergie du signal  $(\Xi_1^{\max} - \Xi_1^{\min})/0.5(\Xi_1^{\max} + \Xi_1^{\min})$ , est reportée en

fonction de  $k_m$ , pour  $\rho = 0.02$ . Les ondulations du soliton sont maximales quand

$$k_m = k_p/N \quad (5)$$

avec  $N = 2, 3, 4...$  Notons que les pics de résonances ont lieu lorsque la fréquence de la modulation est une sous-harmonique de la fréquence propre du soliton, contrairement au cas des systèmes forcés ayant un spectre symétrique, où les pics de résonances ont lieu pour les harmoniques de  $k_p$ . Il est en effet impossible d'obtenir, pour le DOPOAS, des accords de phase analogues à ceux du LAS, cf. section 2, puisque le mode  $-k_p$  n'est pas actif. En revanche, on remarque qu'il y a accord de phase entre la composante  $k_m$  du terme  $A_0(x)$  et la composante  $k_p - k_m$  du terme  $A_0(x)V(x)$  dans les équations (3)-(4), lorsque  $k_m = k_p/2$ .

## 4 Conclusion

Nous avons étudié l'effet d'un forçage multiplicatif, de fréquence spatiale  $k_m$ , sur deux systèmes dissipatifs, le laser, et l'oscillateur paramétrique, qui réagissent très différemment. Les changements spectaculaires observés pour certaines fréquences de modulation, sont attribués à l'existence d'une "fréquence propre"  $k_p$  déjà présente dans le spectre des solitons non modulés, distincte de celle du pic central. Dans les deux cas l'amplitude du pic central est 10 fois supérieure à celle du mode  $k_m$ , mais c'est ce dernier qui est responsable des résonances décrites ici, c'est-à-dire pour des fréquences de modulation multiples ou sous-multiples de  $k_p$ .

Nous avons choisi des profondeurs de modulation conduisant à des pics de résonance de hauteur comparable, dans les deux sections. Notre étude met en évidence tout d'abord que les changements dynamiques des structures aux alentours des pics de résonance, sont différents pour les deux systèmes : Pour le laser la résonance est caractérisée par l'élargissement du soliton, donc une amplification de son énergie, l'intensité restant presque constante. Pour l'oscillateur paramétrique, c'est l'ondulation qui est amplifiée, i.e. les oscillations périodiques de l'intensité du soliton au cours de sa propagation.

D'autre part nous avons montré que la "fréquence propre"  $k_p$  du LAS, est fortement modifiée par le forçage, alors qu'elle est inchangée dans le cas du DOPOAS. Il en résulte que les pics de résonances de ce dernier sont prédictibles à partir de l'analyse linéaire de l'accrochage de la solution,  $k_m = k_{p,lin}/N$ . En revanche, pour le LAS, une analyse nonlinéaire est nécessaire pour prédire les valeurs des pics de résonance. En effet, la relation de blocage en fréquence  $k_m = Nk_p$  ne définit pas un pic de résonance, mais un domaine fini. Le pic de résonance correspond au minimum de  $k_m$  dans le domaine, soit  $k_{m,res} \sim 1.5xN$  pour  $D_0 = 1.65$ , Figs.2-3; mais devient  $k_{m,res} \sim 0.8xN$  dans le cas des solitons décalés pour  $D_0 = 1.7$ . En conclusion nous avons mis en évidence deux comportements différents selon que l'accrochage est dissymétrique ou symétrique. Les résultats présentés devraient être généralisables à de nombreux systèmes où l'accrochage de la structure sur sa base est oscillatoire.

## Références

1. D. E. PELINOVSKI, A.A. SUKHORUKOV, AND Y.S. KIVSHAR, Bifurcations and stability of gap solitons in periodic potentials, *Physical Review E*, **70** (036618), 1-17 (2004).
2. A.G. VLADIMIROV, S.V. FEDOROV, N.A. KALITSEVSKII, G.V. KHODOVA AND N.N. ROSANOV, Numerical investigation of laser localized structures, *Journal of Optics : Quantum and Semiclassical Optics*, **1** (036618), 101-106 (1999).
3. K. STALIUNAS, Midband dissipative spatial solitons, *Physical Review letters*, **91** (053901), 1-4 (2003).
4. (a) M. TLIDI, P. MANDEL, M. HAELTERMAN, Spatiotemporal patterns and localized structures in nonlinear optics, *Physical Review E*, **56**, 6524-6530 (1997); (b) M. TLIDI, M. TAKI, M. LE BERRE, E. RESSAYRE, A. TALLET AND L. DI MENZA Moving localized structures and spatial patterns in quadratic media with a saturable absorber, *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, **6**, 2635-2672, (2004); (c) A.Barsela, C. Lepers, M. Taki, M. Tlidi, *Optics Communications*, **232**, 381-389 (2004)