

Effets combinés du bruit et d’inhomogénéités dans un milieu de réaction-diffusion

S. Morfu, P. Marquié

Laboratoire LE2I UMR 5158 Aile des sciences de l’ingénieur BP 47870 21078 Dijon Cedex
smorfu@u-bourgogne.fr

Résumé. Nous nous intéressons aux conditions de propagation d’un front dans un milieu non linéaire diffusif à la fois inhomogène et perturbé par du bruit. Nous montrons numériquement que les inhomogénéités structurelles nuisent à la transmission de l’information tandis que le bruit améliore la transmission.

Abstract. We investigate the pinning and de-pinning conditions of a kink in both homogeneous and inhomogeneous reaction-diffusion media. We show that structural inhomogeneities hinder information propagation whereas noise enhances propagation.

1 Introduction

Les équations de réaction-diffusion sont présentes dans de nombreux domaines de la physique, chimie et biologie [1]. Ces dernières années, de nombreuses études ont été consacrées à ces systèmes non linéaires car les équations de réaction diffusion peuvent modéliser le comportement des fibres nerveuses et des tissus cardiaques. Dans ce papier, nous focaliseront notre étude sur l’équation de Nagumo exprimée ci-après dans sa version discrete [2] :

$$\frac{du_n}{dt} = D(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + f(u_n), \quad (1)$$

où D représente le couplage intercellulaire et $f(u_n) = -u_n(u_n - a)(u_n - 1)$ représente une non linéarité cubique modélisant les échanges ioniques.

Pour les faibles couplages D en dessous d’une valeur critique D^* , le milieu n’autorise plus la propagation de l’information ce qui peut induire de graves conséquences au niveau des tissus cardiaques. De nombreuses études ont porté sur la détermination de l’expression analytique de cette valeur critique D^* qui ne dépend que du seuil de la non linéarité a [3,4,5,6]. La Figure 1 résume les différents résultats obtenus dans [3,4,6] qui sont comparés aux résultats numériques obtenus avec une simulation directe de l’eq. (1) en utilisant un algorithme de Runge-Kutta d’ordre 4.

Comme le montre la figure 1, le mécanisme d’arrêt de propagation est maintenant bien compris dans les milieux homogènes non perturbés.

Cependant, les fibres nerveuses et les tissus cardiaques modélisés par ces équations de réaction-diffusion sont plutôt inhomogènes qu’homogènes et souvent soumis à des perturbations qu’elles soient aléatoires ou non, ce qui peut conduire à de nouvelles conditions de propagation [7,8]. Par exemple, le mécanisme d’arrêt de propagation peut également se manifester dans un milieu discret de couplage intercellulaire D_1 du fait d’une inhomogénéité de couplage D_2 plus grande que D_1 (c’est à dire pas forcément plus petite que D^*) [9,10,11]. Au contraire, il a été montré que le bruit agissait contre le mécanisme d’arrêt de propagation dans un réseau électrique de circuit de Chua modifié [12] ou dans un milieu de Nagumo homogène [13]. On se propose de restreindre notre étude au milieu de Nagumo en considérant à la fois des inhomogénéités structurelles et les effets du bruit.

Nous étudions tout d’abord les effets d’une distribution de couplage de type heaviside sur les conditions de propagation. Dans la troisième partie de cet article, nous considérons les effets du bruit sur les inhomogénéités de couplage.

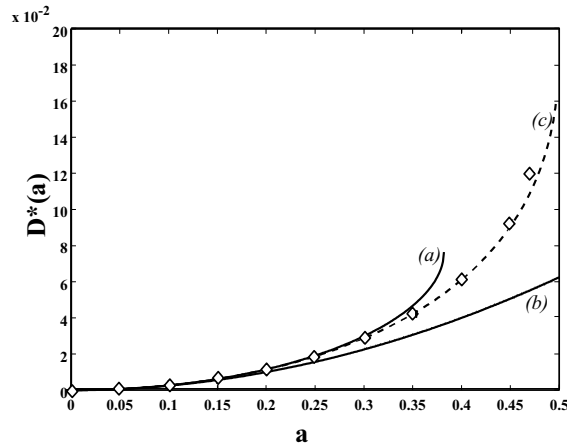


Fig.1. Couplage critique interdisant la propagation. Les prédictions théoriques (pointillés (c)) tirées de [6] sont comparées aux résultats numériques ((\diamond)). Nous présentons également les résultats tirés de [3,4] (lignes continues (a) et (b) respectivement).

2 Milieu inhomogène

Dans cette partie, nous considérons la jonction de deux milieux homogènes M_1 et M_2 de couplage respectif D_1 et D_2 , la jonction étant localisée au site d'interface m . Cette configuration d'inhomogénéités est similaire à celle étudiée par les cardiophysologistes Wang et Rudy qui ont étudié la propagation de potentiels d'action dans les tissus cardiaques présentant un changement abrupte de couplage intercellulaire [14]. Ils ont montré expérimentalement que la propagation n'était possible que si le couplage D_2 dans le second milieu est compris entre deux valeurs critiques [D_{inf}^* ; D_{sup}^*]. Nous nous proposons d'étudier numériquement ce comportement en considérant le modèle de Nagumo.

Le milieu de Nagumo inhomogène est décrit par l'eq. (1) avec $D = D_1$ avant l'interface (soit pour $n < m$), et avec $D = D_2$ après l'interface (soit pour $n > m$), tandis que la dynamique du site d'interface m est régie par

$$\frac{du_m}{dt} = D_1(u_{m-1} - u_m) + D_2(u_{m+1} - u_m) + f(u_m). \quad (2)$$

Pour un couplage donné D_1 dans le premier milieu, nous analysons numériquement en fonction du couplage D_2 du second milieu si un front initié dans le premier milieu franchit l'interface située au site m . La longueur du réseau simulé est 50 cellules, le site d'interface est localisé au site $m = 25$. Nous obtenons numériquement le même comportement qu'ont rapporté les cardiophysologistes Wang et Rudy, c'est à dire l'existence de deux valeurs critiques D_{inf}^* et D_{sup}^* définissant l'intervalle de valeur de D_2 autorisant la propagation dans le second milieu.

Nous avons réalisé plusieurs simulations numériques du système à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 et de pas d'intégration temporel $dt = 0.01$. Nous avons changé à chaque fois le couplage D_2 pour estimer par dichotomie la valeur critique D_{sup}^* au delà de laquelle un front initié dans le premier milieu reste piégé au site d'interface m .

En utilisant la même méthode nous avons également déterminé numériquement la seconde valeur critique D_{inf}^* en dessous de laquelle le front ne franchit pas l'interface. Les deux valeurs critiques sont tracées en pointillés figure 2 et fournissent la plage de paramètres autorisant la propagation d'un front dans un milieu inhomogène de Nagumo présentant une distribution de couplage de type heaviside.

Nous avons également étudié l'effet d'arrêt de propagation induit par une seule inhomogénéité de couplage D_2 dans un milieu de Nagumo de couplage intercellulaire D_1 . On observe le même comportement qualitatif, c'est à dire l'existence de deux valeurs critiques de couplage D_{inf}^* et D_{sup}^* définissant les conditions de propagation (ligne continue de la figure 2).

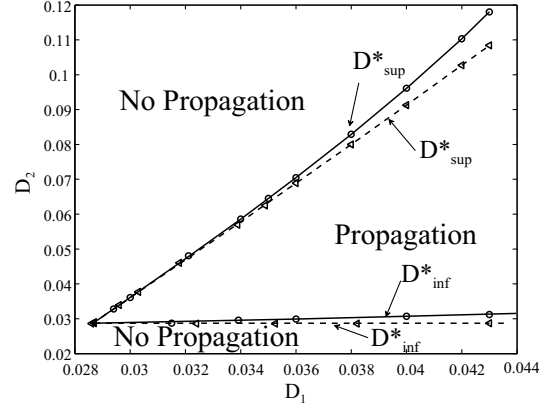


Fig.2. Mécanisme d'arrêt de propagation induit par deux distribution de couplages. Valeurs critiques D_{inf}^* et D_{sup}^* du couplage D_2 définissant les conditions de propagation pour une distribution de couplage du type heaviside (pointillés) et pour une distribution de Dirac (traits pleins). Seuil de non linéarité $a = 0.3$.

3 Milieu inhomogène bruité

Dans ce paragraphe, nous étudions numériquement le comportement d'un milieu inhomogène de Nagumo initialement en condition d'arrêt de propagation au site d'interface m et soumis à un bruit spatio-temporel. Un tel milieu inhomogène bruité est décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} = D_1(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + f(u_n) + \eta_n(t) \text{ for } n < m \\ \frac{du_m}{dt} = D_1(u_{m-1} - u_m) + D_2(u_{m+1} - u_m) + f(u_m) + \eta_m(t) \text{ for } n = m \\ \frac{du_n}{dt} = D_2(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + f(u_n) + \eta_n(t) \text{ for } n > m. \end{cases} \quad (3)$$

où $\eta_n(t)$ est un bruit blanc spatialement indépendant et uniforme sur $[-\sqrt{3}\sigma; \sqrt{3}\sigma]$.

Nous fixons le couplage D_1 dans le premier milieu à 0.03. De plus, le couplage D_2 dans le second milieu est plus grand que la valeur critique $D_{sup}^* = 0.036$ de tel sorte que sans bruit le front se propageant dans le premier milieu ne peut pas franchir le site d'interface m . Nous étudions en fonction de l'amplitude (R.M.S.) de bruit σ du bruit spatio-temporel $\eta_n(t)$ si le front franchit le site d'interface m . Nos résultats de simulation révèlent qu'il existe une quantité minimum de bruit σ^* qui permet au front de franchir le site d'interface m . Cette valeur, tracée figure 3 en fonction de D_2 , est estimée par dichotomie pour chaque valeur de D_2 en simulant le système pour un temps de simulation suffisamment long (soit $t = 30000$ dans notre cas).

4 Conclusion

Dans le cas du model discret de Nagumo, nous avons numériquement montré que la présence d'inhomogénéités structurelles peut nuire à la propagation d'information, tandis que le bruit peut réduire les conséquences fatales de ces inhomogénéités. Nous pensons que ces résultats peuvent être étendu à d'autres distributions d'inhomogénéités qu'elles soient périodiques ou non et pourraient également concerner d'autres paramètres du milieu présentant des inhomogénéités comme par exemple le seuil de la non linéarité a . En fait, ce travail étend au milieu inhomogène l'effet de propagation assisté par le bruit souvent observé dans les milieux non linéaires [13,15,16]. Pour finir, ce travail pourrait être utile pour mieux comprendre la propagation de l'information dans les fibres nerveuses myelinisées.

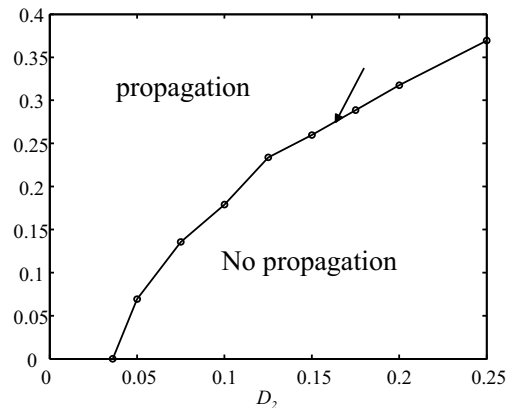


Fig.3. Amplitude R.M.S de bruit minimum σ^* permettant de franchir le site d'interface en fonction du couplage D_2 . $D_1 = 0.03$, $a = 0.3$.

Références

1. Murray J.D. (1989). *Mathematical biology*, ed. Springer-Verlag, Berlin.
2. Nagumo J., Arimoto S. and Yoshisawa S., (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, **50** : 2061.
3. Keener J.P. (1987). Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells. *SIAM J. Appl. Math.*, **47** : 556–572.
4. Laplante J.P. and Erneux T. (1992). Propagation failure and multiple steady states in an array of diffusion coupled flow reactor. *Physica A*, **188** : 89–98.
5. Mitkov I. (1999). One-and two-dimensional wave fronts in diffusive systems with discrete sets of nonlinear sources. *Physica D*, **133** : 398–403.
6. Comte J.C., Morfu S. and Marquié P. (2001). Propagation failure in discrete bistable reaction-diffusion systems : theory and experiments. *Phys. Rev. E*, **64** : 027102.
7. Kulka A., Bode M., Purwins H.-G., (1995). On the influence of inhomogeneities in a reaction-diffusion system. *Phys. Lett. A*, **203** : 33–39.
8. Keener J.P. (2000). Homogenization and propagation in the bistable equation. *physica D*, **136** : 1–17.
9. Mornev O.A. (1991). *Elements of the Optics of Autowaves in Nonlinear Wave Processes in Excitable Media*, ed. A.V. Holden, M. Markus and H.G. Othners, Plenum Press, N.Y. : 111–118.
10. Morfu S., Comte J.C., Marquié P. and Bilbault J.M. (2002). Propagation failure induced by coupling inhomogeneities in a nonlinear diffusive medium. *Phys. Lett. A*, **294** : 304–307.
11. Morfu S., Nekorkin V.I., Bilbault J.M. and Marquié P. (2002). The wave front propagation failure in an inhomogeneous discrete Nagumo chain : theory and experiments. *Phys. Rev. E*, **66** : 046127–1/8.
12. Báscones R., García-Ojalvo J., Sancho J.M., (2002). Pulse propagation sustained by noise in arrays of bistable electronic circuits. *Phys. Rev. E*, **65** : 061108.
13. Morfu S. (2003). Propagation failure reduction in a Nagumo chain *Phys. Lett. A*, **317**, 73–79.
14. Wang Y. and Rudy Y. (2000). Action potential propagation in inhomogeneous cardiac tissue : safety factor consideration and ionic mechanism. *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.*, **278** : H1019.
15. Lindner J.F., Chandramouli S., Bulsara S.R., Löcher M., and Ditto W.L. (1998). Noise enhanced propagation. *Phys. Rev. Lett.*, **23** : 5048–5051.
16. Löcher M., Cigna D., and Hunt E.R., (1998). Noise sustained propagation of a signal in coupled bistable electronic element. *Phys. Rev. Lett.*, **80** : 5212–5215.