

# Étude numérique et expérimentale d'ondes non linéaires en écoulements cisailés annulaires tournants

Éric Serre<sup>1</sup>, Emmanuel Plaut<sup>2</sup> & Yannick Lebranchu<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LMSNMGP, UP — UM — UAM3 — CNRS, 38 rue Frédéric Joliot-Curie, 13451 Marseille cedex 20

<sup>2</sup> LEMTA, INPL — UHP — CNRS, 2 avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex

Emmanuel.Plaut@ensem.inpl-nancy.fr

**Résumé.** L'objectif principal, à terme, est d'établir l'existence ou non d'effets de couplage global dans les modèles de Ginzburg-Landau susceptibles de décrire l'évolution spatio-temporelle de l'enveloppe de ces ondes.

**Abstract.** We study numerically and experimentally nonlinear waves produced by shearing with a rotating lid a possibly rotating channel of fluid. We aim at testing the validity of local and nonlocal Ginzburg-Landau models describing the spatio-temporal evolution of the envelope of these waves.

## 1 Introduction

La compétition entre un mode d'écoulement simple invariant par translations spatio-temporelles et des ondes non linéaires est une thématique récurrente en hydrodynamique, qui a connu des développements récents. Dans le cas de l'écoulement de Couette plan par exemple, la transition vers les ondes non linéaires est très fortement sous-critique, et n'est pas liée à l'existence d'une instabilité de l'écoulement de base [1]. Même dans des cas où la transition vers les ondes est liée à une instabilité, et dans une géométrie quasi unidimensionnelle, les contraintes sur le champ de pression moyen liées à une topologie annulaire du domaine d'écoulement peuvent entraîner l'invalidité de l'approche classique de Ginzburg-Landau (GL) [2]. En effet, en écoulements incompressibles, alors que des modes de vitesse de nombre d'onde  $k > 0$  dans la direction azimutale sont typiquement associés à un champ de pression variant azimutalement et à un débit nul, un mode de nombre d'onde 0 doit au contraire être associé à un champ de pression indépendant de l'azimut, tout en correspondant - éventuellement - à un débit non nul. Ainsi, lorsque des ondes faiblement non linéaires engendrent un mode 0 de débit non nul, la limite des nombre d'ondes tendant vers 0 est singulière, et la distinction qu'il faut faire entre mode 0 et modes de petit nombre d'onde conduit à une équation de GL non locale,

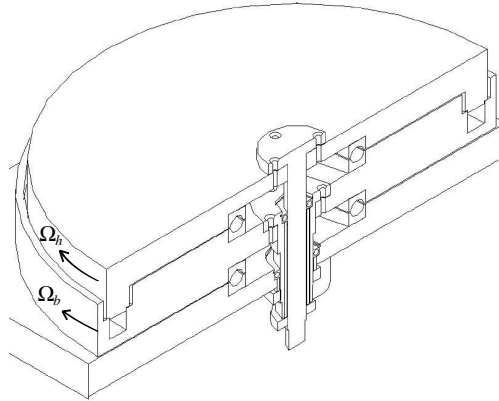
$$\tau(\partial_t A + v_g \partial_x A) = (1 + ic_0)\epsilon A + \xi^2(1 + ic_1)\partial_x^2 A - \gamma(1 + ic)|A|^2 A - \delta(1 + id)\langle |A|^2 \rangle_x A. \quad (1)$$

Dans cette équation  $x$  représente l'abscisse curviligne le long du périmètre moyen de l'anneau,  $A(x, t)$  l'enveloppe des ondes et  $\langle \cdot \rangle_x$  la valeur moyenne sur un tour. Il faut noter que, pour une onde pure, lorsque  $A = A_0(t) \exp(iqx)$  avec  $q$  le nombre d'onde réduit, comme  $|A|$  ne dépend pas de  $x$  les termes non linéaires local et non local de (1) s'ajoutent pour redonner l'équation de GL classique

$$\tau(\partial_t A + v_g \partial_x A) = (1 + ic_0)\epsilon A + \xi^2(1 + ic_1)\partial_x^2 A - g_3(1 + ic_3)|A|^2 A \quad (2)$$

avec  $g_3 = \gamma + \delta$ ,  $c_3 = (\gamma c + \delta d)/g_3$ . L'une des finalités des études présentées ici est justement la mise en évidence d'éventuels effets non locaux du type (1).

Dans ce but une expérience, dont le schéma de principe est montré Fig. 1, est mise au point au LEMTA. Un plateau fixe supporte un premier plateau tournant éventuellement à la vitesse angulaire  $\Omega_b$ , dans lequel un canal de section carrée a été creusé. Un autre plateau disposé au dessus de celui-ci, tournant à la vitesse  $\Omega_h > \Omega_b$ , vient cisailer le fluide contenu dans le canal. Le rayon intérieur (extérieur) du canal est 180 mm (198 mm), ce qui impose un rayon moyen  $r_m = 189$  mm et un inter-rayon  $h = 18$  mm. Le



**Fig.1.** Schéma de l'expérience du LEMTA. Les plateaux tournants sont en plexiglass, de façon à permettre un accès optique au canal pour la caractérisation des écoulements.

rapport inter-rayon sur rayon moyen est ainsi 0.095, indiquant des effets de courbure plutôt faibles, et laissant donc espérer que l'approche quasi unidimensionnelle (1), (2) puisse être valable.

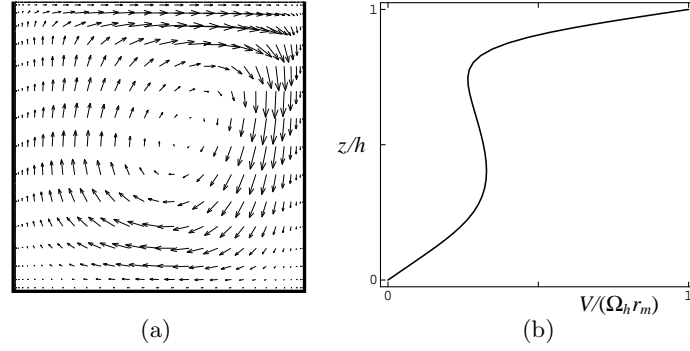
Lorsque  $\Omega_b = 0$ , ce système équivaut à celui utilisé par l'équipe de F. Charru à Toulouse pour étudier des instabilités interfaciales [3] et plus récemment la dynamique d'écoulements d'huile et de matière granulaire [4]. Alors que cette équipe s'est concentrée sur des études diphasiques ou monophasiques à faible nombre de Reynolds haut  $R_h = \Omega_h r_m h / \nu$  ( $\nu$  étant la viscosité du fluide),  $R_h \leq 400$ , notamment dans le but de produire un écoulement de base proche de l'écoulement de Couette plan, nous nous concentrons sur des études en monophasique à  $R_h \geq 400$ . D'autre part, l'introduction d'un deuxième paramètre de contrôle, le nombre de Reynolds bas  $R_b = \Omega_b r_m h / \nu$ , est enrichissante, puisque des études en contrarotation pure (lorsque  $R_b = -R_h$ ) ou au contraire en corotation rapide ( $R_b$  légèrement inférieur à  $R_h$ ) deviennent possibles. Ainsi le paramètre de contrôle principal du système est le nombre de Reynolds différentiel  $\Delta R = R_h - R_b$ , tandis qu'un paramètre de contrôle secondaire est le nombre de Reynolds moyen  $R_m = \frac{1}{2}(R_b + R_h)$ .

## 2 Étude numérique

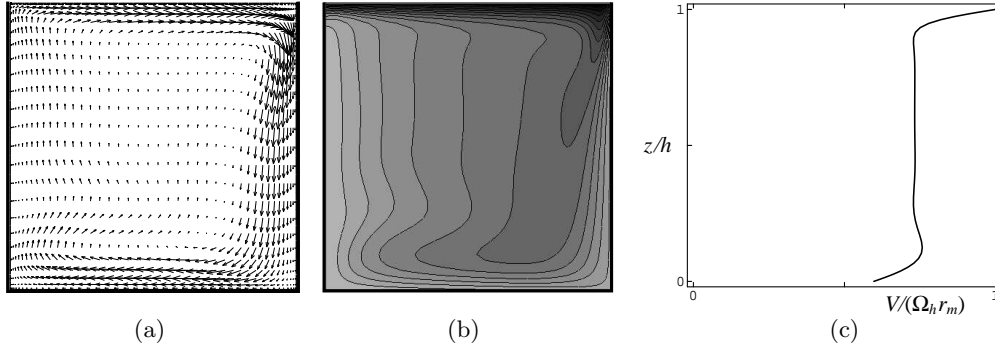
Elle a été réalisée au moyen du code pseudo-spectral présenté dans [5,6]. La géométrie est identique à celle de l'expérience : on travaille en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  en prenant en compte tous les effets de courbure. Le référentiel utilisé est le référentiel du laboratoire. Pour régulariser les singularités de vitesse tangentielle aux points de jonction entre les bords et le couvercle, on a imposé comme dans [6] un profil de vitesse exponentiel sur les bords, dans une couche limite numérique dont la taille est de l'ordre de  $0.06h$ . Le nombre de modes utilisés dans les directions non homogènes varie entre 64 et 90 en  $r$ , 48 et 64 en  $z$ . Dans la direction azimutale homogène, le nombre de modes de Fourier varie entre 96 et 150.

Les écoulements de base axisymétriques sont tridimensionnels, à cause de la force centrifuge liée à la rotation du couvercle, qui induit un rouleau transverse dans une section du canal (Fig. 2a). Par advection, la vitesse azimutale est diminuée (augmentée) par rapport à ce qu'elle serait en l'absence de ce rouleau dans la partie interne supérieure (externe inférieure) du canal (Fig. 2b). En conséquence le profil d'écoulement au milieu du canal est non monotone (Fig. 2c). La même tendance était déjà visible sur la Fig. 5 de [3]; ainsi, même en l'absence de rotation du fond et des bords, lorsque  $R_h \geq 400$  l'écoulement de base est déjà très différent de l'écoulement de Couette plan.

Lorsque l'on introduit une corotation rapide, l'écoulement transverse tend à se localiser dans des couches limites, d'où l'apparition d'un cœur en rotation quasi solide (Fig. 3). Cet effet peut être vu comme une conséquence de la force de Coriolis, et de la contrainte de Taylor-Proudman, qui tend à interdire des variations de vitesse suivant la coordonnée axiale  $z$  dans le cœur du canal.



**Fig.2.** Écoulement de base axisymétrique calculé pour  $R_b = 0$ ,  $R_h = 750$ . (a) Champ de vitesse transverse. En traits épais le fond et les bords; bord extérieur à droite. La vitesse radiale maximale est  $0.07\Omega_h r_m$ . (b) Niveaux de vitesse azimutale. (c) Profil axial de vitesse azimutale au milieu du canal ( $r = r_m$ ).



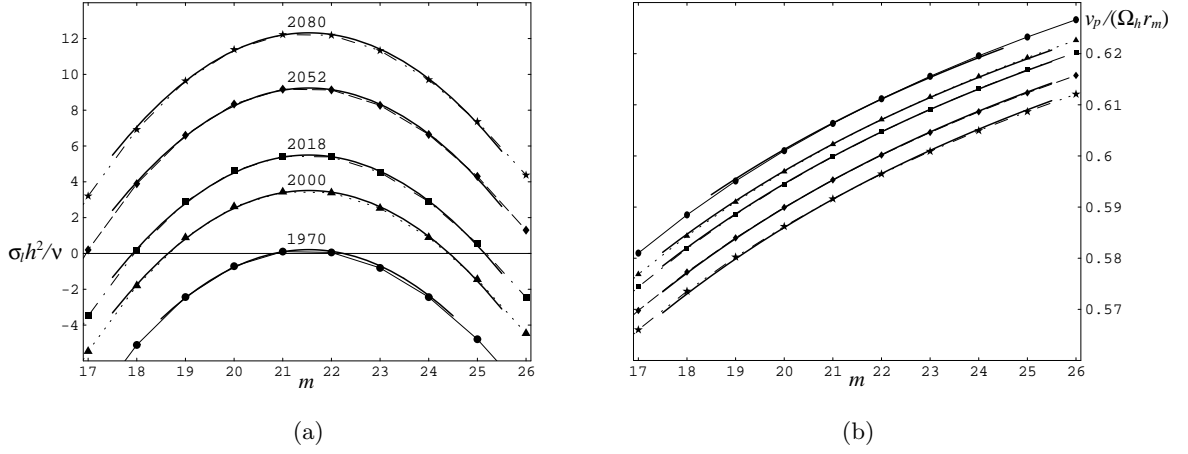
**Fig.3.** Comme Fig. 2 mais en corotation rapide  $R_b = 2991$ ,  $R_h = 5009$  i.e.  $R_m = 4000$ ,  $\Delta R = 2018$ . En (a) la vitesse radiale maximale est  $0.06\Omega_h r_m$ .

Pour analyser la stabilité de ces écoulements axisymétriques de façon efficace avec notre code de simulation numérique directe, nous avons utilisé la méthode d'analyse modale de [7]. On introduit de petites perturbations de tous les modes de Fourier en  $\exp(im\theta)$  en sus du mode 0 de base. Après un transitoire rapide, ces perturbations relaxent en général vers les modes linéaires les plus dangereux du système. En suivant l'évolution temporelle des intensités de Fourier de la solution, on s'aperçoit effectivement qu'elles se mettent alors à évoluer en  $\exp[\sigma_l(m) t]$ . Des ajustements linéaires opérés sur les logarithmes des intensités de Fourier donnent alors accès aux taux de croissance ou de décroissance  $\sigma_l(m)$ . D'autre part une étude des signaux de Fourier oscillants donne accès, par une mesure des périodes temporelles associées, aux pulsations correspondantes  $\omega_l(m)$ . L'avantage est qu'à l'aide d'une seule simulation on accède aux valeurs de tous les  $\sigma_l(m)$  et  $\omega_l(m)$ , pour les nombres de Reynolds que l'on a imposés.

Un ensemble de valeurs de  $\sigma_l(m)$  obtenu avec cette méthode est présenté Fig. 4a. Pour ces calculs en corotation rapide, avec  $R_m = 4000$ , une instabilité structurante apparaît dès que  $\Delta R \geq 1970$ , ce qui justifie l'usage de modèles du type GL (1) et (2). Plus précisément ces deux modèles prédisent, d'après la règle de calcul du nombre d'onde cartésien  $k = m/r_m$  (cf.  $\theta = x/r_m$ ), si  $k_c = m_c/r_m$  est le nombre d'onde cartésien critique,  $q = k - k_c$  le nombre d'onde cartésien réduit,  $\Delta R_c$  le seuil de l'instabilité,  $\epsilon = \Delta R/\Delta R_c - 1$  l'écart au seuil réduit,  $\tau$  le temps caractéristique,  $\xi$  la longueur de cohérence,

$$\sigma_l = \frac{\epsilon - \xi^2 q^2}{\tau} = \frac{1}{\tau \Delta R_c} \Delta R - \frac{1}{\tau} - \frac{\xi^2}{\tau} \left( \frac{m}{r_m} - k_c \right)^2. \quad (3)$$

Par ajustement des données de la Fig. 4a à cette loi, en choisissant 38 modes actifs, les modes 19 à 24 pour  $\Delta R = 1970$ , 18 à 25 pour  $\Delta R = 2000$ , 2018, 2052 et 2080, on obtient un bon modèle des  $\sigma_l$  - cf. les



**Fig.4.** Résultats de l'analyse modale de stabilité d'écoulements de base en corotation rapide, c'est-à-dire  $R_m = 4000$ . (a) Taux de (dé)croissance  $\sigma_l$  adimensionnés par multiplication par le temps visqueux  $h^2/\nu$ . Les valeurs de  $\Delta R$  sont indiquées au dessus de chaque courbe. (b) Vitesses de phase réduites  $\omega_l/(k\Omega_h r_m)$  des mêmes modes.

courbes en traits épais Fig. 4a; l'erreur relative moyenne est de seulement 6.9% - avec

$$k_c = 2.05/h \text{ (i.e. } \lambda_c = 2\pi/k_c = 3.06h), \quad m_c = 21.5, \quad \Delta R_c = 1968, \quad \tau = 0.00462h^2/\nu, \quad \xi = 0.462h. \quad (4)$$

Cette instabilité structurante est oscillante puisque chaque mode en  $\exp(im\theta)$  pulse en  $\exp[-i\omega_l(m)t]$ ; plutôt que de montrer les pulsations  $\omega_l$  la Fig. 4b montre les vitesses de phase  $v_p = \omega_l/k$  divisées par la vitesse du couvercle au centre du canal  $\Omega_h r_m$ . Ces résultats peuvent aussi être décrits par les modèles de GL (1), (2), qui donnent pour un mode linéaire d'instabilité, si  $\omega_c$  est la pulsation critique,  $c_0$  le coefficient de décalage fréquentiel par variation du Reynolds différentiel,  $v_g$  la vitesse de groupe des ondes,  $c_1$  le coefficient de décalage fréquentiel par variation du nombre d'onde,

$$\omega_l = \omega_c - \frac{c_0}{\tau}\epsilon + v_g q + \frac{c_1 \xi^2}{\tau} q^2 = \omega_c - \frac{c_0}{\tau} \left( \frac{\Delta R}{\Delta R_c} - 1 \right) + v_g \left( \frac{m}{r_m} - k_c \right) + \frac{c_1 \xi^2}{\tau} \left( \frac{m}{r_m} - k_c \right)^2. \quad (5)$$

Par ajustement à cette loi on obtient

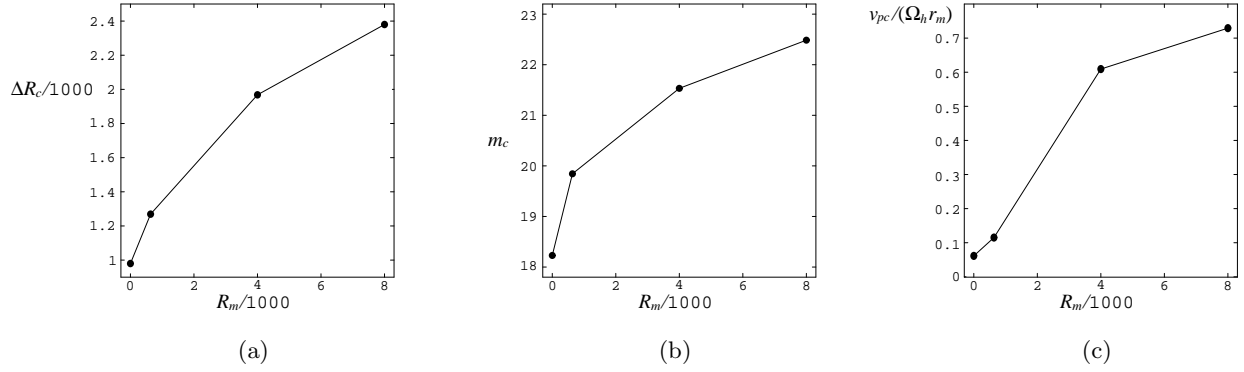
$$\omega_c = 6227\nu/h^2, \quad c_0 = 6.90, \quad v_g = 3536\nu/h, \quad c_1 = -0.268 \quad (6)$$

et les courbes en traits épais de la Fig. 4b, qui confirment la validité de l'approche de GL à ce stade : l'erreur maximale sur les pulsations est de 0.09% en valeur relative. Physiquement les valeurs réduites des vitesses de phase montrent que les ondes sont progressives et se propagent à environ 60% de la vitesse du couvercle, ce qui est raisonnable au vu des Fig. 3b,c. On peut aussi noter que la vitesse de groupe des ondes est du même ordre de grandeur, soit près du seuil 71% de la vitesse du couvercle.

Cette analyse modale a été répétée pour différentes valeurs du Reynolds moyen, et une première synthèse des résultats obtenus est montrée sur la Fig. 5. La Fig. 5a montre clairement l'influence stabilisante des forces de Coriolis liées à une corotation rapide; en conséquence l'instabilité en corotation rapide requiert de plus forts gradients i.e. des valeurs plus élevées de  $m$  (Fig. 5b), tendance classique dans des systèmes de ce type. Quant aux vitesses de phase des ondes (Fig. 5c), elles sont de l'ordre de grandeur de la vitesse azimutale moyennée sur une section.

En ne gardant typiquement que les modes en  $\exp(\pm iMm\theta)$  avec  $M = 0, 1, 2, 3$  dans le code de simulation directe, nous avons calculé des ondes pures non linéaires saturées. L'amplitude du mode fondamental obéit à la prédiction des modèles de GL (1) et (2),

$$|A_n(m)| = \sqrt{\frac{\epsilon - \xi^2 q^2}{g_3}} = \sqrt{\frac{\Delta R / \Delta R_c - 1 - \xi^2 (m/r_m - k_c)^2}{g_3}}, \quad (7)$$



**Fig.5.** Paramètres critiques (Reynolds différentiel, nombre d'onde, vitesse de phase) caractérisant la première instabilité des écoulements de base axisymétriques, en fonction de  $R_m$ , lorsque  $\Delta R$  est progressivement augmenté.

avec un coefficient de saturation  $g_3 > 0$ , indiquant une bifurcation sur-critique. Par exemple pour  $R_m = 4000$  la loi (7) est vérifiée dans le domaine de la Fig. 4, jusqu'à  $\Delta R = 2080$  i.e.  $\epsilon = 0.057$ , pour  $m = 19$  et 21, avec des erreurs de l'ordre de 5%.

Une mesure des pulsations  $\omega_n$  des ondes non linéaires révèle qu'elles sont très proches des pulsations linéaires  $\omega_l$ . Par exemple pour  $R_m = 4000$ ,  $m = 21$ , dans le domaine de la Fig. 4, la variation maximale de pulsation est obtenue à  $\Delta R = 2080$  et vaut  $\omega_n(21)/\omega_l(21) - 1 = 0.09\%$ . Cette variation est significative par rapport à notre précision de mesure des pulsations, inférieure à 0.001%, mais par contre elle est du même ordre de grandeur que les variations entre les pulsations linéaires  $\omega_l$  effectivement mesurées et les pulsations linéaires  $\omega_l$  prédites par le modèle de GL (5). À cause de cela, un test de loi de GL que l'on peut déduire de (1) et (2),

$$\omega_n(m) - \omega_l(m) = c_3 \frac{\epsilon - \xi^2 q^2}{\tau} = c_3 \frac{\Delta R / \Delta R_c - 1 - \xi^2 (m/r_m - k_c)^2}{\tau} \quad (8)$$

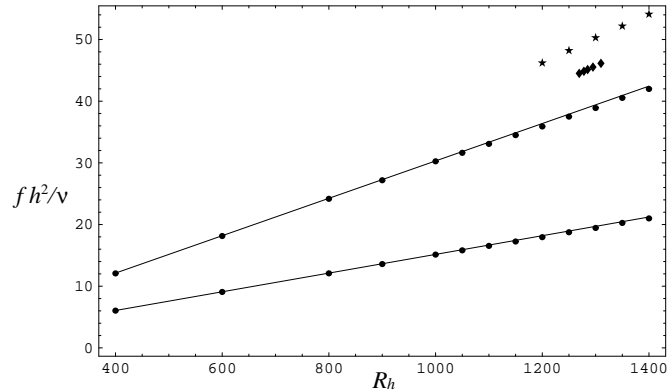
s'avère extrêmement délicat voire impossible, du moins pour  $R_m = 4000$ . Cet effet semble assez général car il se produit aussi à  $R_m = 635$ .

### 3 Étude expérimentale

Des expériences ont été entreprises avec le montage présenté Fig. 1. Des moteurs électriques entraînent les plateaux. Leur vitesse de rotation est mesurée par un système optique enregistrant le passage de stries tracées sur l'arbre de chaque moteur. On a ainsi une grande précision de mesure sur les nombres de Reynolds haut et bas, et on a vérifié une bonne stabilité de ceux-ci, avec des variations de  $R_{b,h}$  inférieures à 0.5%; ces variations prennent en compte de légères variations de la température, mesurée par un thermocouple, donc de la viscosité de l'eau.

On a commencé par des manipulations avec le plateau inférieur fixe, c'est-à-dire  $R_b = 0$ . Des mesures de vitesse azimutale ont été réalisées par anémométrie laser-doppler, en ensemençant l'écoulement avec de petites particules. Des séries temporelles ont ainsi été obtenues, qui présentent un bruit haute fréquence caractéristique de cette métrologie. Cependant le spectre de Fourier de ces séries présente de façon robuste des pics de basse fréquence. Pour  $R_h \leq 1200$ , ces pics, montrés par des disques sur la Fig. 6, correspondent clairement à la fréquence de rotation du plateau supérieur et à la fréquence double (segments sur la Fig. 6). Cet effet est sans doute dû à un léger défaut du montage. Ces pics restent cependant d'une intensité assez faible quelque soit  $R_h$ . Un point intéressant est l'apparition, pour  $R_h \simeq 1200$ , d'un nouveau pic plus intense à une fréquence non multiple de la fréquence de rotation. Les positions de ce pic sont montrées par des étoiles sur la Fig. 6; ces fréquences varient apparemment linéairement avec  $R_h$ . Elles indiquent un nouveau phénomène sans doute lié à l'instabilité mise en évidence numériquement. En effet pour  $R_b = 0$

on a obtenu numériquement une instabilité pour  $R_h \geq 1269$  et  $m_c = 19.9$ ; les pulsations de l'onde non linéaire de nombre d'onde fondamental  $m = 20$  sont montrées par des losanges sur la Fig. 6, le point à plus bas  $R_h$  correspondant au seuil d'apparition de cette onde. On constate un accord semi-quantitatif entre ces résultats théoriques et nos premiers résultats expérimentaux.



**Fig.6.** En fonction du nombre de Reynolds haut, à fond fixe, fréquences caractéristiques adimensionnées de séries de vitesse azimutale obtenues expérimentalement (disques et étoiles) et numériquement (losanges).

## 4 Conclusion

Le fait que les pulsations des ondes linéaires et non linéaires soient très proches, qui empêche toute mesure précise du (petit) coefficient  $c_3$  de décalage fréquentiel par variation de l'amplitude dans (1) ou (2), est sans doute lié à ce que les ondes n'introduisent pratiquement aucune correction de débit. Ceci suggère de se focaliser maintenant sur des études en contrarotation pure, puisqu'alors le débit de l'écoulement axisymétrique, quasi nul en l'absence d'ondes, sera très vraisemblablement modifié par les ondes.

É.S. remercie l'IDRIS pour le temps de calcul alloué dans le cadre du projet 05242 *Écoulements tournants avec parois*. E.P. et Y.L. remercient Jean-Yves Morel et Alain Delconte pour leur aide à la conception de l'expérience, et Jean-Pierre Brancher pour son financement.

## Références

1. F. WALEFFE, Three-dimensional coherent states in plane shear-flows. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 4140-4143 (1998).
2. Voir par exemple E. PLAUT, Nonlinear dynamics of traveling waves in rotating Rayleigh-Bénard convection : effects of the boundary conditions and of the topology. *Phys. Rev. E*, **67**, 046303, (2003).
3. P. BARTHELET, F. CHARRU & J. FABRE, Experimental study of interfacial long waves in a two-layer shear flow. *J. Fluid Mech.*, **303**, 23-53 (1995).
4. F. CHARRU, H. MOUILLERON & O. EIFF, Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.*, **519**, 55-80 (2004).
5. E. SERRE, E. CRESPO-DEL-ARCO & P. BONTOUX, Annular and spiral patterns in flows between rotating and stationary discs. *J. Fluid Mech.*, **434**, 65-100 (2001).
6. E. SERRE, P. BONTOUX & B. E. LAUNDER, Direct numerical simulation of transitional turbulent flow in a closed rotor-stator cavity. *Flow, Turb. Combust.*, **69**, 35-50 (2002).
7. J. D. SCHEEL, M. R. PAUL, M. C. CROSS & P. F. FISCHER, Traveling waves in rotating Rayleigh-Bénard convection : Analysis of modes and mean flow, *Phys. Rev. E*, **68**, 066216 (2003).