

Dynamiques non linéaires expérimentales à retard et à temps discret

Mélanie Grapinet, Laurent Larger, Pierre-Ambroise Lacourt, & Vladimir Udaltsov

Institut FEMTO-ST, UMR 6174, Université de Franche-Comté 16 Route de Gray, 25030 BESANCON Cedex
melanie.grapinet@univ-fcomte.fr

Résumé. Nous observons expérimentalement des dynamiques à temps discret obtenues au sein d'un oscillateur optoélectronique non linéaire à retard alimenté par une source impulsionnelle. Au travers d'une étude complète nous avons recherché de manière systématique des diagrammes de bifurcation en fonction d'un des paramètres du système. L'analyse de ces diagrammes a permis de mettre en évidence une évolution en T2, T4, T3 menant au chaos.

Abstract. Experimentally, we report the discrete time dynamics obtained with a delay feedback electro-optic oscillator seeded by ultra-short pulses. We observe a period three window after the first chaotic regimes.

1 Introduction

Les dynamiques non linéaires à retard, découvertes en optique voici plusieurs années par K. Ikeda [1], forment une classe particulière de systèmes dynamiques. Plus récemment, des dynamiques non linéaires à temps discret ont été observées par l'équipe de L. Larger [2] grâce à l'utilisation d'une excitation lumineuse impulsionnelle. Le système optoélectronique permettant cette visualisation de dynamiques à complexité élevée, est modélisé par l'équation intégral-différentielle suivante :

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) + \frac{1}{\theta} \int_{t_0}^t x(s) ds = \beta(t) \sin^2 [x(t - T) + \phi_0]. \quad (1)$$

où $x(t)$ est la variable dynamique, T est le retard temporel, τ et θ sont les constantes de temps du système et $\beta(t) = \beta_0 p(t)$ est un forçage périodique externe de nature impulsionnelle, où $p(t)$ est une enveloppe normalisée de l'impulsion et β_0 représente la puissance optique crête. Dans les dynamiques à retard classique, $\beta = \beta_0$ est constant et sert habituellement de paramètre de bifurcation. Contrairement aux études menées jusqu'à présent, une dépendance temporelle de β est introduite. Si l'étude des diagrammes de bifurcation obtenus pour un gain β indépendant du temps est bien cernée [3], il n'en est pas de même pour les cas où β possède une dépendance temporelle. Nous nous sommes donc concentrés sur le cas où la source optique est de type impulsionnelle. Lorsque β est constant, la dynamique à retard est déjà intrinsèquement à échelles multiples ($T \approx 10^3 \tau \approx 10^6 \theta$). Avec l'introduction d'une modulation impulsionnelle rapide de β , nous sommes en présence d'une dynamique quasi-discrete rythmée par le taux de répétition de $\beta(t)$, mais toujours à échelle de temps multiples. Deux nouvelles échelles de temps sont introduites, la largeur du pulse et la période de répétition. Le comportement à temps discret est obtenu lorsque le temps de réponse τ de l'oscillation est suffisamment grand devant la largeur des pulses, et suffisamment faible devant la période de ces pulses.

Le travail présenté ici a pour but d'interpréter des dynamiques à retard obtenues par une application à temps discret. Après un bref descriptif du montage, nous analyserons un diagramme de bifurcation expérimental typique d'un tel oscillateur. Puis, nous développerons une étude menée par rapport au paramètre ϕ_0 du système étudié : l'offset horizontal de la transformation non linéaire décrit dans l'équation (1). Expérimentalement, il est lié au point de repos d'un interféromètre de type Mach-Zehnder électro-optique, utilisé pour réaliser la non linéarité. Enfin, nous terminerons par l'observation d'un hystérésis du comportement dynamique en fonction du gain du système β_0 .

2 Description expérimentale

L'oscillateur chaotique produisant un comportement chaotique très large bande d'une porteuse optique est illustré à la figure 1. Il permet d'observer différents types de dynamiques non linéaires : stationnaire (point fixe), périodique (cycle) ou chaotique.

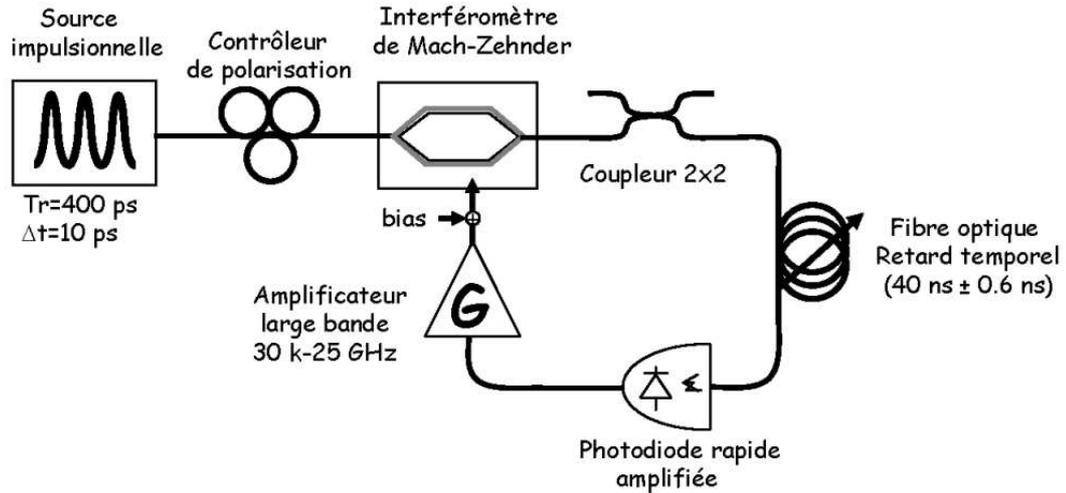


Fig.1. Schéma du dispositif expérimental d'un générateur de chaos

Ce montage est étudié au départ dans le contexte des communications optiques par chaos. La motivation originale de l'architecture à source laser impulsionnel est liée à l'obtention d'un comportement dynamique chaotique en amplitude, mais discret en temps, de manière à pouvoir envisager une compatibilité avec les systèmes de communications modernes rythmés par une horloge.

Pour ce faire, la nature discrète du chaos est obtenue à partir d'impulsions optiques à 1550 nm d'une durée d'au plus 10 ps, avec un taux de répétition de 2.5 GHz ($T_r = 400$ ps). Les impulsions peuvent ainsi être bien séparées par le temps de réponse τ de la boucle optoélectronique, de l'ordre de 40 ps. L'amplitude de ces impulsions est modulée chaotiquement à l'aide d'une architecture de dynamiques non linéaires à retard, composée par une non linéarité de type Mach-Zehnder électro-optique. Cet interféromètre à deux ondes, accordable, est modulé par une tension de commande permettant de passer d'une interférence constructive à une interférence destructive. Quelques mètres à quelques dizaines de mètres de fibre optique permettent de retarder le signal optique d'interférence d'une durée τ_R , et un système de détection/amplification large bande permet une contre-réaction optoélectronique sur le Mach-Zehnder.

3 Résultats expérimentaux

3.1 Diagramme de bifurcation

L'ensemble des dynamiques non linéaires produites sont mises en évidence grâce à un diagramme de bifurcation acquis à partir du signal optique de sortie de la transformation non linéaire (Mach-Zehnder). La figure 2 représente l'allure d'un diagramme de bifurcation obtenu en faisant varier continûment et lentement la valeur de la puissance optique crête injectée, c'est-à-dire du gain du système noté β_0 (évalué en % de sa valeur maximum environ 10 mW).

Le diagramme de bifurcation est construit grâce aux histogrammes portant sur la distribution de densité de probabilité du maximum des impulsions lumineuses en sortie du Mach-Zehnder en fonction

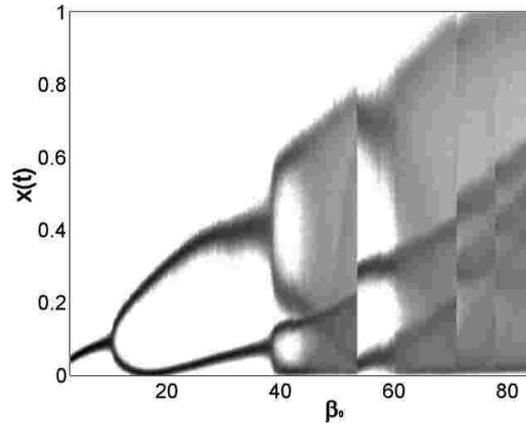


Fig.2. Exemple de diagramme de bifurcation obtenu grâce à un générateur de chaos à temps discret

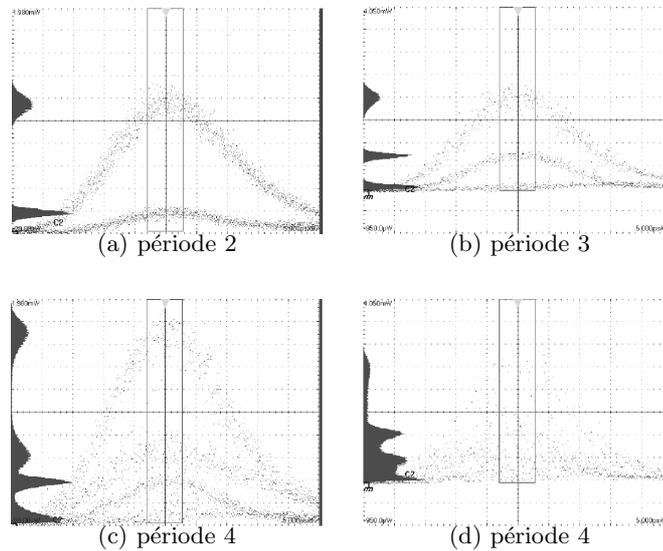


Fig.3. Traces expérimentales et histogrammes des impulsions optiques.

de β_0 . En enregistrant cette distribution dans un important intervalle de valeurs de β_0 , nous obtenons un diagramme de bifurcation. A partir de ces diagrammes, nous pouvons identifier divers régimes : stationnaire (un point fixe), périodique (un nombre fini de solutions : un cycle attracteur) ou encore chaotique (un ensemble infini de solutions).

La figure 3 représente l'état du système tout d'abord par une trace expérimentale des impulsions optiques, enregistrée par un oscilloscope répétitif très large bande. A gauche de chaque trace expérimentale est représenté un histogramme relatif aux maxima du train d'impulsions. L'histogramme est calculé à partir d'une fenêtre temporelle centrée sur les impulsions, et délimitée par le rectangle en trait plein sur la figure 3. Le diagramme de bifurcation est construit à partir de ces histogrammes.

Le diagramme de bifurcation, illustré sur la figure 2, se lit de la manière suivante. La partie de gauche du diagramme, obtenue avec une faible valeur de β_0 , correspond à une solution stationnaire pour une injection optique notée $\beta_0 \in [0\%; 10\%]$. A partir de $\beta_0 \approx 10\%$, le point fixe perd sa stabilité en même temps qu'un cycle stable apparaît. Expérimentalement, on observe des impulsions possédant deux amplitudes

différentes (figure 3 (a)). Ce phénomène est connu sous le nom de **"doublement de période"** et est marqué par une première bifurcation de Hopf de type surcritique (figure 2). L'évolution de la dynamique suit alors la route traditionnelle vers le chaos par une cascade par dédoublements de période jusqu'à $\beta_0 \approx 53\%$. Compte tenu du bruit, on ne peut pas observer des cycles en 2^n au delà de $n=2$.

Le cycle de période T4, apparaissant pour $\beta_0 \approx 38\%$ et illustré sur la figure 3 (c), est suivi d'un premier développement chaotique. Pour un $\beta_0 \approx 53\%$, une crise réinitialise le système vers une fenêtre de périodicité très nette d'ordre 3, qui ne s'observe habituellement pas dans le cas du temps continu ($\beta(t)$ constant) (figure 3 (b)). Un nouveau scénario d'interprétation des dynamiques à retard en tant que dynamiques discrètes a pu être ainsi mis en évidence. Le régime en T3 est suivi d'un régime chaotique illustré à la figure 3 (d) et correspondant à $\beta_0 = 60\%$. Ce régime chaotique est marqué par une distribution de probabilité très irrégulière (non gaussienne), exactement comme dans le cas des applications ou dynamiques en temps discret. A partir de $\beta_0 = 70\%$, une succession de crises fait apparaître plusieurs régimes chaotiques.

3.2 Etude selon le paramètre d'offset, ϕ_0

Une étude particulièrement fine sur le paramètre d'offset ϕ_0 du système optoélectronique peut être effectuée. Nous faisons varier ce paramètre de manière à parcourir deux minima et un maximum de la fonction de transformation non linéaire, obtenus respectivement pour ϕ_0 valant 0, 3.7 et 7 Volts. La succession des diagrammes de bifurcation obtenus est illustrée sur la figure 4.

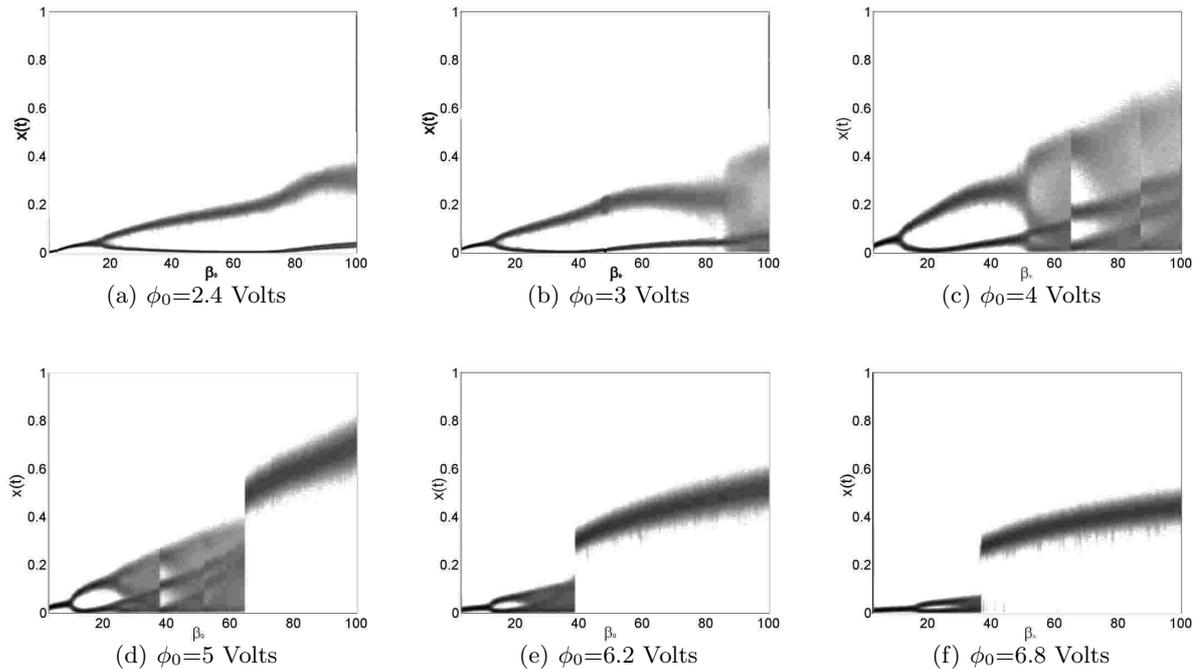


Fig.4. Evolution des diagrammes de bifurcation en augmentant la valeur du paramètre ϕ_0

Entre les diagrammes (a) et (f), la valeur de ϕ_0 passe de 2.4 à 6.8 Volts par pas successifs. Dans le diagramme (a), une seule bifurcation de Hopf entre un état stationnaire et un cycle de période 2 est observable. En augmentant successivement la valeur de ϕ_0 , nous observons un début de cascade harmonique pour aboutir avec $\phi_0 = 4$ Volts, à des dynamiques successives en T2, T4 et T3 menant au chaos. Pour cette valeur de ϕ_0 , on se trouve sur une interférence constructive : la non linéarité est parabolique, comme pour l'application logistique. En poursuivant l'augmentation de la valeur de ϕ_0 ,

nous décrivons la décroissance de la fonction de transfert jusqu'à son minimum. On constate alors une diminution de l'amplitude des dynamiques ainsi qu'une réduction du nombre des fenêtres de régime chaotique. Le système échappe au développement du chaos en créant un nouvel attracteur par le biais d'une impulsion unique de forte puissance. Ce type de comportement tranche nettement par rapport au cas de l'application logistique, son origine est supposée liée au terme intégral de (1).

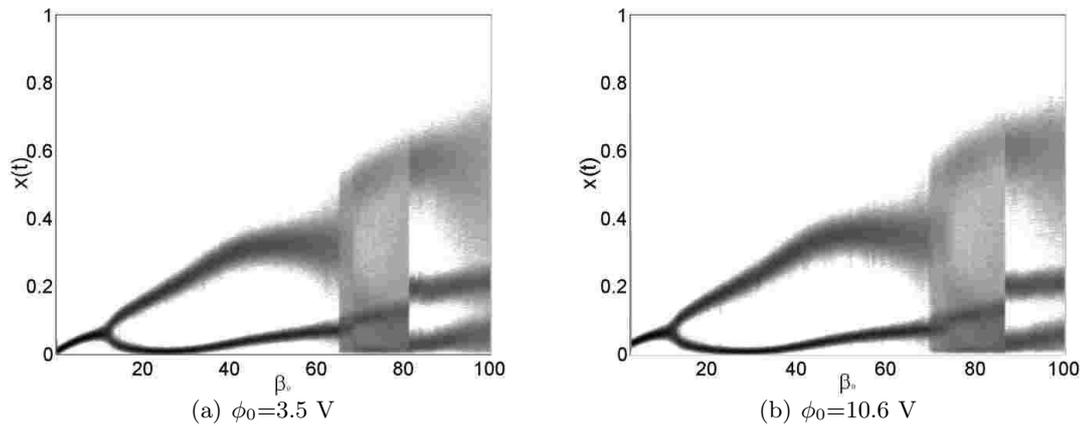


Fig.5. Diagrammes de bifurcation expérimentaux

Une seconde étude est menée portant sur la reproductibilité des diagrammes de bifurcation. La fonction de transformation non linéaire est de type sinusoïdale impliquant ainsi une périodicité en fonction de ϕ_0 . La figure 5 représente deux enregistrements de diagramme de bifurcation respectivement pour ϕ_0 valant 3.5 et 10.6 Volts, prouvant ainsi la périodicité des dynamiques non linéaires par rapport à ϕ_0 .

3.3 Hystérésis

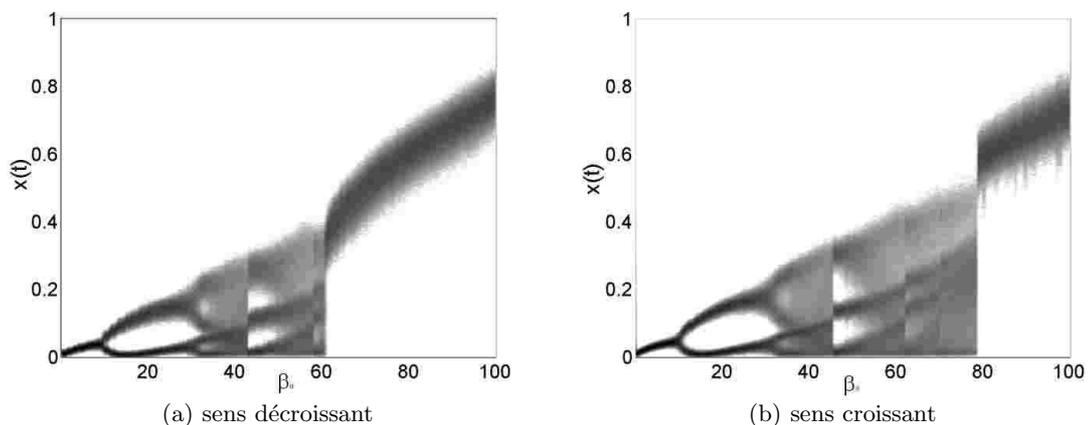


Fig.6. Diagrammes de bifurcation expérimentaux obtenus pour une valeur de ϕ_0 de 4.42. a) par variation décroissante de β_0 et b) par variation croissante de β_0 .

Lors du tracé du diagramme de bifurcation, l'état antérieur du système est défini par le régime dynamique précédent. Ainsi, selon le sens de variation du paramètre β_0 lors de l'enregistrement du diagramme de bifurcation, il est possible d'observer différentes dynamiques pour des valeurs de paramètres identiques : il s'agit de la **bistabilité** [4]. Ce phénomène est illustré sur la figure 6 où

- (a) représente un diagramme de bifurcation obtenu en partance d'un point fixe du système et en augmentant la valeur de paramètre β_0 ,
- (b) représente, quant à elle, un diagramme de bifurcation obtenu cette fois-ci en diminuant la valeur du paramètre β_0 .

Ainsi, il est possible de mettre en évidence un cycle d'hystérésis des dynamiques pour ce système à temps discret. Lors d'une variation décroissante, le système échappe au développement du chaos en créant un nouvel attracteur par le biais d'une impulsion unique de forte puissance. Cette variation s'effectue de manière continue c'est-à-dire sans saut dans la nature des dynamiques. Les enregistrements des dynamiques en fonction du gain du système présentent un cycle d'hystérésis. Il apparaît que selon les conditions initiales, il est possible d'obtenir un domaine d'existence chaotique plus important. Cette étude met en évidence, en particulier, l'importance des conditions initiales. Dans l'intervalle [62%; 79%], on observe un régime instable. Les deux solutions de la puissance des impulsions (point fixe, développement chaotique) ne sont pas observables simultanément, et leur existence respective dépend des conditions initiales.

4 Conclusion

L'étude expérimentale a porté sur un générateur de chaos obtenu grâce à une source impulsionnelle dont les impulsions d'une durée de 10 ps sont séparées d'environ 400 ps. Ces impulsions sont suffisamment éloignées par rapport au temps de réponse de la boucle d'oscillation, pour parler de temps discret. Une analyse en fonction d'un des paramètres a mis en évidence une route menant au chaos typique des temps discret : T2, T4, T3 puis le chaos. L'enregistrement des données s'effectuant par modification de la puissance de pompage de manière croissante ou décroissante a permis de mettre en évidence un hystérésis des dynamiques en fonction du gain optique du système. L'utilisation d'une source impulsionnelle permet d'observer des périodes triples dans le diagramme de bifurcation [5].

Remerciement

Ce travail est financé par l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du projet "Apport du Chaos dans la Sécurisation des systèmes Communicants Optiques et Mobiles". Le séjour du Pr. Vladimir Udaltsov est financé par l'Université de Franche-Comté.

Références

1. K. IKEDA, Multiple-valued Stationary State and its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System, *Optics Communications*, **30** (3), 257-261 (1979).
2. L. LARGER, P.A. LACOURT, S. POINSOT ET M. HANNA, From flow to map in an experimental high-dimensional electro-optic nonlinear delay oscillator, *Physical Review Letters*, **95** (4), 043903 (2005).
3. M. LE BERRE, E. RESSAYRE, A. TALLET, Y. POMEAU, Dynamic system driven by a retarded force acting as colored noise, *Physical Review A*, **41** (12), 6635-6646 (1990).
4. H. M. GIBBS, F. A. HOPF, D. L. KAPLAN ET R.L. SHOEMAKER, Observation of chaos in optical bistability, *Physical Review Letters*, **46** (7), 474-477 (1981).
5. Y. LIU ET J. OHTSUBO, Period three cycle in a chaotic system using a laser diode active interferometer, *Optics communication*, **93** (5-6), 311-317 (1992).