

Thermalisation de paquets d'ondes incohérents

Silvère Lagrange, Stéphane Pitois, Hans Rudolf Jauslin & Antonio Picozzi

Institut Carnot de Bourgogne, UMR 5209 CNRS-Université de Bourgogne
9 avenue Alain Savary, 21078 Dijon Cedex
Silvere.Lagrange@u-bourgogne.fr

Résumé. Nous montrons théoriquement et expérimentalement qu'un ensemble de paquets d'ondes non-linéaires et incohérents évolue irréversiblement vers un état d'équilibre, dans lequel les paquets d'ondes se propagent tous avec une même vitesse de groupe. Ce résultat peut être expliqué à l'aide d'arguments thermodynamiques basés sur la théorie cinétique de la turbulence faible.

Abstract. We show both theoretically and experimentally that a set of incoherent nonlinear waves irreversibly evolves to a specific equilibrium state, in which the individual wave-packets propagate with identical group-velocities. This intriguing process of velocity-locking can be explained in detail by simple thermodynamic arguments based on the kinetic wave theory.

1 Introduction

L'étude des propriétés de cohérence d'ondes optiques incohérentes se propageant dans un milieu non linéaire a suscité un intérêt croissant ces dernières années, depuis la première mise en évidence expérimentale d'un soliton optique incohérent dans un cristal photoréfractif [1]. Le soliton incohérent consiste en un effet d'auto-piégeage de lumière spatialement et temporellement incohérente dans un milieu non linéaire à réponse non-instantanée, i.e., le temps de réponse est beaucoup plus grand que le temps de cohérence du champ optique. La simplicité remarquable des expériences réalisées dans les milieux photoréfractifs s'est traduite par une investigation fructueuse de la dynamique d'ondes non linéaires et incohérentes [2]. On notera que les solitons incohérents [3,4] et certaines propriétés remarquables d'ondes non linéaires incohérentes ont aussi été étudiées dans les milieux non linéaires usuels à réponse instantanée [5].

On se propose d'analyser dans ce travail l'évolution des propriétés de cohérence d'un ensemble d'ondes incohérentes se propageant dans un milieu non linéaire cubique. Nous avons identifié, théoriquement et expérimentalement, un processus de verrouillage de vitesses des ondes incohérentes dans une fibre optique. Cet effet se caractérise par une évolution irréversible des paquets d'ondes vers un état d'équilibre spécifique dans lequel tous les paquets d'ondes se propagent avec une vitesse de groupe identique. Ce nouvel effet est décrit théoriquement à l'aide d'arguments thermodynamiques simples basés sur la théorie cinétique de la turbulence faible [6].

2 Approche théorique

Nous considérons la propagation de M paquets d'ondes incohérents pouvant être distingués, par exemple, par leur fréquence porteuse $\omega_{0,j}$ ou par leur état de polarisation (pour $M = 2$). Leurs largeurs spectrales $\Delta\omega_j$ sont telles que $\Delta\omega_j \ll \omega_{0,j}$ de sorte que l'approximation des enveloppes lentement variables soit valide. En notant z la direction de propagation, l'évolution des amplitudes A_j des ondes incohérentes peut être décrite par un ensemble de M équations (Hamiltoniennes) de Schrödinger non-linéaires (NLS) couplées [7] :

$$i(\partial_z + u_j^{-1}\partial_t)A_j = -\alpha_j\partial_{tt}A_j + \gamma_j(|A_j|^2 + \kappa\sum_{i\neq j}|A_i|^2)A_j \quad j = 1, \dots, M \quad (1)$$

Les paramètres u_j et γ_j représentent respectivement la vitesse de groupe et le coefficient non-linéaire du paquet d'ondes A_j , κ désignant le rapport entre les coefficients de modulation de phases croisées et d'auto-modulation de phase. Les paramètres de dispersion de vitesse de groupe sont données par $\alpha_j = (\partial^2 k_j / \partial \omega^2) / 2$, $k_j(\omega) = \alpha_j \omega^2 + \omega / u_j$ étant la relation de dispersion linéaire de A_j . L'équation (1) conserve la puissance $N_j = \int |A_j|^2 dt$ de chaque champ A_j , le Hamiltonien H [2] et l'impulsion totale $P = \sum_i P_i$ avec $P_i = \text{Im} \int A_i^* \partial_t A_i dt$. Il est important de noter qu'en optique les variables de temps et d'espace sont inversées par rapport à l'écriture usuelle de l'équation NLS.

La dynamique de notre système peut être analysée par intégration numérique des équations couplées (1). Nous nous plaçons dans un régime incohérent pour lequel les fluctuations des amplitudes A_j rendent le temps de corrélation des ondes beaucoup plus petit que le temps caractéristique d'évolution non-linéaire : $t_{c,j} \ll \tau_{nl,j} = \sqrt{\alpha_j \Lambda_j}$, $\Lambda_j = 1 / (\gamma_j \langle |A_j|^2 \rangle)$ étant la longueur non-linéaire correspondante et $\langle \cdot \rangle$ une moyenne sur un ensemble de réalisations. Sur la figure (1a), nous montrons l'évolution typique des fréquences moyennes $\bar{\omega}_j(z) = \int \omega n_j d\omega / \int n_j d\omega$ de $M = 3$ ondes incohérentes, $n_j(z, \omega)$ étant le spectre en z associé à l'onde A_j . Comme condition initiale à $z = 0$, nous avons pris trois amplitudes stochastiques $A_j(z = 0, t)$ de moyennes nulles et caractérisées par une statistique stationnaire. Dans le régime de propagation linéaire ($\gamma_j = 0$), les composantes A_1 , A_2 et A_3 se propagent avec des vitesses de groupes respectives u_1 , u_2 et u_3 distinctes. Dans le cas où on introduit un couplage non-linéaire, la figure (1a) montre que les fréquences moyennes des ondes incohérentes tendent rapidement vers des valeurs particulières $\bar{\omega}_j^{eq}$. En raison de la dispersion de vitesse de groupe, ces décalages de fréquence se traduisent par des changements de vitesses de groupe des ondes, suivant la relation de dispersion de vitesse de groupe $v_j^{-1}(\omega) = \partial k_j / \partial \omega = u_j^{-1} + 2\alpha_j \omega$ (voir Fig. 2). Comme l'illustre la figure (1b), le résultat remarquable est que les fréquences $\bar{\omega}_j^{eq}$ sont sélectionnées de telle sorte que les trois paquets d'ondes se propagent avec des vitesses de groupe identiques : $v_1(\bar{\omega}_1^{eq}) = v_2(\bar{\omega}_2^{eq}) = v_3(\bar{\omega}_3^{eq}) = v^{eq}$.

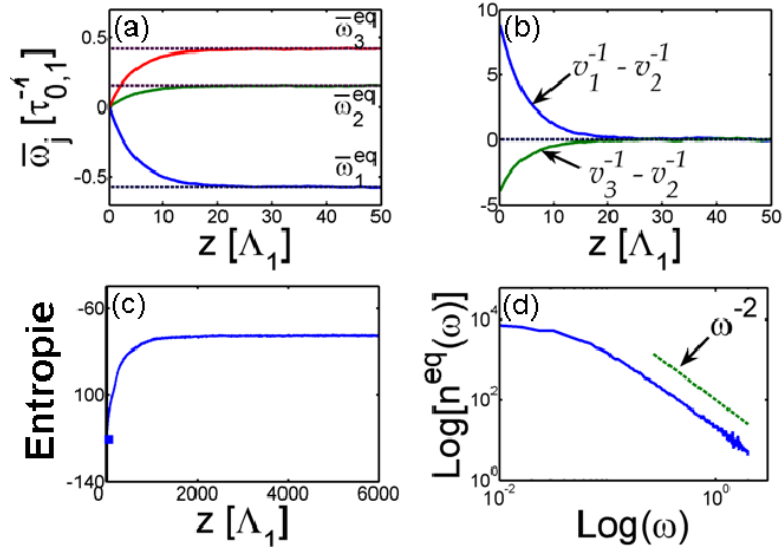


Fig.1. (a) Simulations numériques montrant l'évolution des fréquences moyennes $\bar{\omega}_j(z)$ de $M = 3$ paquets d'ondes incohérents en fonction de z (en unité de longueur non-linéaire Λ_1). (b) Evolution des différences de vitesses de groupe. (c) Evolution de l'entropie. (d) Spectre de la distribution d'équilibre. Ces résultats ont été obtenus en effectuant une moyenne de 200 réalisations [$u_1 = 1/14$, $u_2 = 1/5$, $u_3 = 1$ en unité de $\Lambda_1/\tau_{0,1}$, $\kappa = 2$, $N_1 = N_2 = N_3$, $\alpha_2/\alpha_1 = 0.9$, $\alpha_3/\alpha_1 = 1.1$, $\alpha_1 = 20\text{ps}^2/\text{km}$, $\tau_{0,1} = 0.26\text{ps}$, $\Lambda_j = 3.33\text{m}$, $\sigma_j = 0.15$ ($j = 1, 2, 3$)].

Pour comprendre ce processus de verrouillage de vitesses de groupe, insistons sur le fait que les équations NLS vectorielles ne sont complètement intégrables que si $\gamma_j = \alpha_j = \kappa = 1$ [2]. En revanche, le phénomène de verrouillage de vitesses ne se produit que dans le cas non-intégrable, pour lequel la

dynamique non-linéaire conduit à un processus irréversible de diffusion dans l'espace des phases [8]. Les propriétés de cette évolution irréversible vers un état d'équilibre peuvent être décrites par la théorie cinétique des ondes. L'approximation des phases aléatoires brise la réversibilité formelle des équations NLS vectorielles, ce qui nous permet de dériver un ensemble d'équations cinétiques irréversibles décrivant les évolutions couplées des spectres $n_j(z, \omega)$, définis par $\langle a_j(z, \omega_1) a_j^*(z, \omega_2) \rangle = n_j(z, \omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2)$, où a_j est la transformée de Fourier de A_j [$a_j(z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int A_j(z, t) e^{-i\omega t} dt$], [9]

$$\partial_z n_j(z, \omega_1) = \kappa^2 \sum_{i \neq j} \text{Coll}[n_i, n_j]. \quad (2)$$

Les termes de collisions croisés

$$\begin{aligned} \text{Coll}[n_i, n_j] = \int d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 W n_j(\omega_1) n_i(\omega_2) n_i(\omega_3) n_j(\omega_4) \\ \times [n_j^{-1}(\omega_1) + n_i^{-1}(\omega_2) - n_i^{-1}(\omega_3) - n_j^{-1}(\omega_4)], \end{aligned} \quad (3)$$

fournissent une description cinétique des termes d'interaction croisés de l'équation (1), i.e., le mélange à quatre ondes se produisant pour une paire de paquets d'ondes distincts A_i et $A_{j \neq i}$. L'approche cinétique peut être considérée comme une analogie entre le mélange à quatre ondes et un gaz collisionnel de quasi-particules. A chaque collision, les conditions de résonances traduisant la conservation de l'énergie et de l'impulsion sont satisfaites comme l'exprime la présence de fonctions δ de Dirac dans $W = \frac{\gamma_i^2}{\pi} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \delta[k_j(\omega_1) + k_i(\omega_2) - k_i(\omega_3) - k_j(\omega_4)]$. Il est important de noter que les termes d'auto-modulation de phase de l'équation (1) ne contribuent pas à l'équation cinétique (2), car la conservation de l'énergie et de l'impulsion est trivialement satisfaite pour le problème unidimensionnel considéré ici.

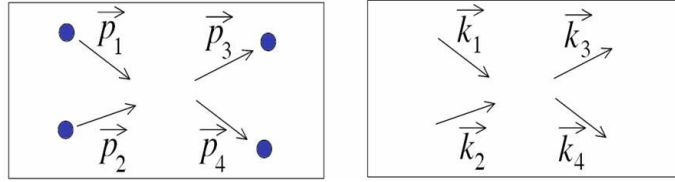


Fig.2. Analogie entre un système de particules classiques et l'interaction à 4 ondes dans un milieu non-linéaire cubique de type Kerr. Les collisions sont responsables de l'évolution irréversible du gaz vers l'équilibre thermodynamique. Par analogie, le mélange à quatre ondes des fréquences qui constituent l'onde incohérente conduit l'onde non-linéaire vers l'équilibre thermodynamique.

Comme pour l'équation de Boltzmann usuelle [10], l'ensemble des M équations cinétiques couplées (2) conserve le nombre de quasi-particules $N_j = \int n_j(z, \omega) d\omega$ de chaque paquet d'ondes A_j , l'énergie cinétique totale $E = \sum_i E_i$, $E_i = \int k_i(\omega) n_i(z, \omega) d\omega$, et l'impulsion totale $P = \sum_i P_i$, $P_i(z) = \int \omega n_i(z, \omega) d\omega$. Le caractère irréversible de l'équation (2) s'exprime via le théorème H , qui traduit une croissance monotone de l'entropie hors équilibre $dS/dz \geq 0$. Pour notre système, l'entropie hors équilibre s'écrit $\mathcal{S} = \sum_i \mathcal{S}_i$, $\mathcal{S}_i = \int \text{Log}[n_i(z, \omega)] d\omega$. Comme en mécanique statistique, l'état d'équilibre thermodynamique est déterminé ici à partir du postulat de maximum d'entropie [10]. Les spectres d'équilibre $n_j^{eq}(\omega)$ réalisant le maximum de $\mathcal{S}[n_j]$, soumis aux contraintes de conservation de E , P et N_j , peuvent être calculés en introduisant les multiplicateurs de Lagrange respectifs $1/T$, λ/T and $-\mu_j/T$:

$$n_j^{eq}(\omega) = \frac{T}{|\alpha_j| \omega^2 + s_j (\lambda + u_j^{-1}) \omega - \mu_j}. \quad (4)$$

T est équivalente à une température (représentant la notion de thermalisation entre les champs A_j), μ_j le potentiel chimique de A_j et $s_j = \text{sign}(\alpha_j)$ [11]. La distribution (4) annule le terme de collisions (3), i.e.,

$\text{Coll}[n_i^{eq}, n_j^{eq}] = 0$. Cela signifie qu'une fois la distribution d'équilibre (4) atteinte, les spectres n'évoluent plus durant leur propagation, i.e., $\partial_z n_j = 0$. La distribution (4) est une lorentzienne pour laquelle les $M + 2$ constantes T, λ et μ_j peuvent être déterminées à partir des $M + 2$ quantités conservées E, P and N_j . En particulier, à partir de la distribution (4) nous obtenons $P_j^{eq} = -(\lambda + u_j^{-1})N_j/2\alpha_j$, de telle sorte que $\lambda = -(2P + \sum_i N_i/u_i\alpha_i) / \sum_i N_i/\alpha_i$.

L'influence de la conservation de l'impulsion sur les propriétés thermodynamiques d'un ensemble de paquets d'ondes incohérents n'a pas fait l'objet d'une étude détaillée dans le passé. Il est important de noter que le multiplicateur λ conduit à un décalage de fréquence des spectres d'équilibre (4), de telle sorte que les fréquences sélectionnées à l'équilibre s'écrivent

$$\bar{\omega}_j^{eq} = P_j^{eq}/N_j = -(\lambda + u_j^{-1})/2\alpha_j. \quad (5)$$

En raison de la relation de dispersion de vitesse de groupe, $v_j^{-1}(\omega) = u_j^{-1} + 2\alpha_j\omega$, nous obtenons $v^{eq} = v_j(\omega = \bar{\omega}_j^{eq}) = -1/\lambda$ [12]. Ce résultat significatif, expliqué schématiquement sur la figure (3), révèle que, quelques soient les vitesses de groupe initiales u_j , chaque paquet d'ondes A_j évolue irréversiblement vers un état d'équilibre dans lequel il se propage avec une vitesse de groupe commune à tous les autres paquets d'ondes,

$$v^{eq} = \frac{\sum_i N_i/\alpha_i}{2P + \sum_i N_i/(u_i\alpha_i)}, \quad (6)$$

où la valeur de l'impulsion est fixée par la condition initiale $P = P(z = 0)$. Les prédictions théoriques de $\bar{\omega}_j^{eq}$ et v^{eq} [Eqs.(5)-(6)] sont en excellent accord avec les simulations numériques de l'équation NLS vectorielle (1), comme le montre les figures (1a) et (1b). De plus, notre étude numérique confirme l'existence d'un processus de thermalisation irréversible (Figs. 1c et 1d) : l'entropie atteint une valeur d'équilibre constante ($dS/dz \simeq 0$) alors que les spectres $n_j(z, \omega)$ atteignent les distributions lorentziennes (4), indépendamment de leur profil spectral initial.

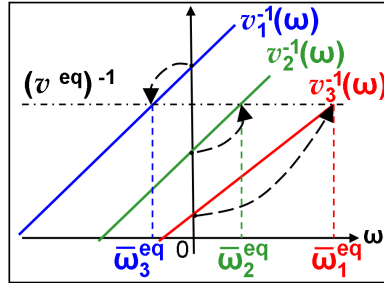


Fig.3. Principe du verrouillage de vitesses (les flèches pointillées indiquent l'évolution des fréquences moyennes des ondes incohérentes lors de leur propagation dans la fibre, de $z = 0$ vers l'équilibre).

3 Etude expérimentale

Nous avons observé expérimentalement cet effet de verrouillage de vitesses de groupe dans une fibre optique fortement biréfringente où $\kappa = 2/3$ (voir figure (4a)).

Dans un tel système, A_1 et A_2 représentent les états de polarisation orthogonaux qui se propagent le long des axes principaux de la fibre. La source incohérente est obtenue à partir de l'émission spontanée (ES) d'un amplificateur à colorant pompé par un laser Nd :YAG impulsif doublé en fréquence. La longueur d'onde centrale de l'ES est de 605 nm et la largeur spectrale est de 3 THz, ce qui correspond à un temps de cohérence de l'ordre de 300 fs. La lumière est ensuite injectée dans 5 m de fibre fortement

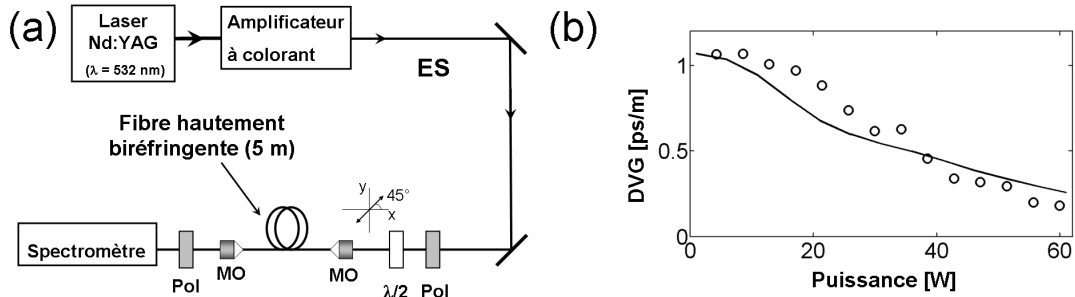


Fig.4. (a) Montage expérimental. (b) Evolution de la différence de vitesses de groupe (DVG) en fonction de la puissance de chaque paquet d'ondes ; cercles : mesures expérimentales, courbe noire : simulations numériques.

biréfringente. L'injection se fait à 45° par rapport aux axes de la fibre, ce qui permet aux deux ondes incohérentes $A_{1,2}$ de se propager avec la même puissance le long des axes lent et rapide de la fibre. Le spectre de la lumière à la sortie de la fibre est enregistré à l'aide d'un spectromètre et un polariseur est utilisé pour visualiser séparément les polarisations orthogonales. La différence de vitesses de groupe (DVG) entre les deux ondes à la sortie de la fibre (δ_s) est ensuite calculée à partir de leur fréquence centrale. La figure (4b) montre l'évolution de δ_s en fonction de la puissance injectée selon chaque axe. A faible puissance, les deux ondes incohérentes n'interagissent pas et se propagent dans la fibre avec une DVG constante de $\delta_s = \delta(z = 0) = 1.07\text{ps/m}$. Lorsque la puissance augmente, les deux ondes sont couplées par la polarisation non-linéaire et, comme le prévoit la théorie, elles tendent à se propager avec la même vitesse de groupe. Ainsi, pour $P=60\text{W}$, la DVG chute pour atteindre 0.21ps/m , soit seulement 20 % de la valeur initiale. Enfin, l'accord quantitatif entre les résultats expérimentaux (cercles) et les simulations numériques (courbe noire) confirme l'observation du processus de verrouillage de vitesses de groupe entre les deux ondes incohérentes.

4 Conclusion

Un nouvel effet de verrouillage de vitesses de paquets d'ondes non-linéaires et incohérents a été identifié théoriquement et démontré expérimentalement dans un système à faibles pertes, i.e., une fibre optique. Une approche cinétique du problème a révélé que ce phénomène résultait d'une évolution irréversible des champs vers un état d'équilibre thermodynamique. Il est important de noter que si l'on considère l'interaction d'envelopes incohérentes localisées spatialement, le verrouillage de vitesse se manifeste comme un piégeage spatial de paquets d'ondes distincts (Fig. 5). Une telle fusion de paquets d'ondes incohérents se produit quelque soit la nature de l'interaction, qui peut être repulsive ("défocalisant", $\alpha_j > 0$) ou attractive ("focalisant", $\alpha_j < 0$).

De plus, il semble que cet effet de thermalisation soit un phénomène générique pour les ondes non-linéaires incohérentes dispersives. Nous l'avons en effet étendu à des systèmes multidimensionnels et à des interactions non-linéaires quadratiques et résonantes [13].

Références

1. M. MITCHELL ET M. SEGEV, *Nature (London)* **387**, 880 (1997).
2. Y.S. KIVSHAR ET G.P. AGRAWAL, *Optical Solitons : From Fibers to Photonic Crystals* (Ac. Press, 2003).
3. A. PICOZZI, M. HAELTERMAN, S. PITOIS, AND G. MILLOT, *Incoherent Solitons in Instantaneous Response Nonlinear Media*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 143906 (2004).
4. A. PICOZZI ET M. HAELTERMAN, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2010 (2001).
5. C. CONNAUGHTON ET AL., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 263901 (2005).

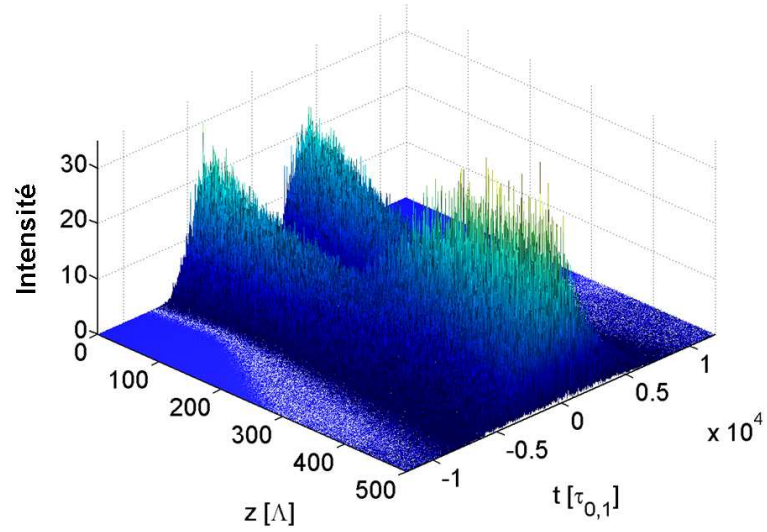


Fig.5. Piégeage spatial de deux paquets d'ondes distincts dû à l'interaction de leurs enveloppes incohérentes localisées spatialement.

6. S. PITOIS, S. LAGRANGE, H. R. JAUSLIN ET A. PICOZZI, Velocity locking of incoherent nonlinear wave packets, *Phys. Rev. Lett.* , **97**, 033902(2006).
7. G.P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics* (Ac. Press, 2001).
8. R.Z. SAGDEEV, D.A. USIKOV ET G.M. ZASLAVSKY, *Nonlinear Physics* (Harwood Publ., 1988).
9. V.E. ZAKHAROV, V.S. L'VOV ET G. FALKOVICH, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I* (Springer, Berlin, 1992); S. Dyachenko *et al.*, *Physica D* **57**, 96 (1992).
10. K. HUANG, *Statistical Mechanics* (Wiley, 1963).
11. Par simplicité, nous considérons le cas où le signe de α_j est le même pour tous les A_j .
12. D'après la définition d'une moyenne dans la théorie cinétique, $\langle \mathcal{A} \rangle_j = \int \mathcal{A} n_j(\omega) d\omega / N_j$ [10], nous avons $\langle v_j^{-1}(\omega) \rangle_j = u_j^{-1} + 2\alpha_j \bar{\omega}_j = v_j^{-1}(\omega = \bar{\omega}_j)$, avec $\bar{\omega}_j = \langle \omega_j \rangle_j$.
13. S. LAGRANGE, H. R. JAUSLIN ET A. PICOZZI (en préparation).