

# Bifurcation d'enveloppe d'un oscillateur optoélectronique micro-onde à retard, à haute pureté spectrale

L. Larger<sup>1</sup>, Y. Chembo<sup>1</sup>, T. Erneux<sup>2</sup>, H. Tavernier<sup>1</sup>, R. Bendoula<sup>1</sup>, P. Colet<sup>3</sup>, & E. Rubiola<sup>1</sup>

<sup>1</sup> FEMTO-ST, UMR 6174, Université de Franche-Comté, 16 route de Gray, F-25030 Besançon cedex, France

<sup>2</sup> Université Libre de Bruxelles, Optique Non Linéaire Théorique, Campus Plaine, B-1050 Bruxelles, Belgique

<sup>3</sup> IMEDEA, CSIC-UIB, Campus Universitat Illes Balears, E-07122 Palma de Mallorca, Espagne

laurent.larger@univ-fcomte.fr

**Résumé.** De nouvelles architectures optoélectroniques pour la génération de références de Temps-Fréquence sont apparues récemment [1]. Elles permettent d'atteindre des puretés spectrales extrêmes grâce à l'utilisation d'un élément de stockage de l'énergie inhabituel dans le contexte des oscillateurs électroniques de grande pureté spectrale : une très grande ligne à retard optique, au lieu du concept classique d'un résonateur. Nous proposons de développer une approche dynamique non linéaire de ce système à retard particulier, qui conduit à la prédiction de phénomènes inattendus d'instabilité d'enveloppe.

**Abstract.** Recent advances in ultra-stable microwave oscillations have introduced novel architectures which are referred to as optoelectronic oscillators [1]. They can provide extreme spectral purity through the introduction of an unusual energy storage principle, based on long optical fiber delay lines instead of the classical concept of resonators. We here propose a nonlinear dynamics approach leading to the prediction of unexpected envelop bifurcation phenomena.

## 1 Les oscillateurs optoélectroniques

Le système physique étudié reprend une architecture (voir figure 1) récemment reportée dans un tout autre contexte, aux perspectives d'application pourtant totalement antagonistes : la génération de comportements chaotiques sur une très large gamme de fréquences, pour utilisation dans des systèmes de communication par chaos [2]. On constate ainsi la richesse dynamique des systèmes à retard, capables de produire des comportements chaotiques de très grande complexité, ou au contraire des oscillations sinusoïdales à très grande pureté spectrale, comme il en est question ici.

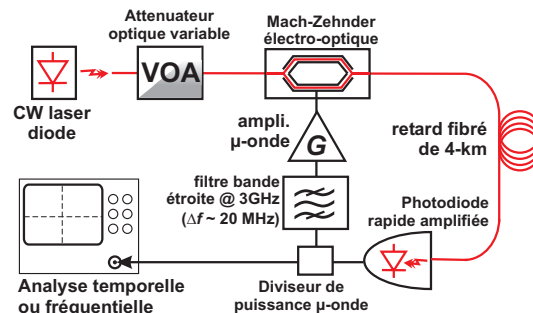


Fig.1. Oscillateur optoélectronique à retard, sélectif en fréquence.

Dans le cas étudié, la différence essentielle entre les paramètres physiques de l'architecture dédié à la génération de chaos, réside dans la présence d'un processus dynamique très sélectif en fréquence, et d'un très grand retard comparé à la période propre du processus dynamique. Ainsi, la dynamique d'oscillateur

harmonique est caractérisée par un amortissement  $m$  très faible (facteur de qualité  $Q = 1/(2m) \simeq 150$ ), avec une fréquence propre  $f_0$  de l'ordre de 3 GHz ( $T_0 \simeq 330$  ps). Quant au retard temporel, celui-ci est réalisé à l'aide d'une fibre optique télécom de très faible absorption (0,2 dB/km), de 4 km de long ( $T = 20 \mu\text{s} \simeq 2.10^5 T_0$ ), qui permet de retarder l'oscillation micro-onde lorsque celle-ci est utilisée pour moduler une lumière laser de la seconde fenêtre télécom (1,55  $\mu\text{m}$ ). Le rôle de cette grande ligne à retard peut être vue dans le domaine temporel comme un élément de stockage de l'énergie sur un très grand nombre de périodes propres, ou dans le domaine fréquentiel comme un élément sélectif en fréquence du fait du très faible intervalle spectral libre entre deux modes adjacents liés au retard ( $\Delta f_T = 1/T = 50$  kHz). C'est pratiquement un modulateur de Mach-Zehnder électro-optique télécom, intégré sur Niobate de Lithium, qui sert à transporter l'oscillation micro-onde sur la porteuse optique. Ce modulateur réalise un interféromètre à deux ondes, dont la condition d'interférence est accordable par l'intermédiaire de la tension micro-onde appliquée. La fonction de transfert de modulation est donc potentiellement fortement non linéaire (fonction  $\cos^2(\cdot)$ ), selon l'amplitude de la tension de modulation, par rapport à la tension caractéristique du modulateur correspondant à un déphasage de  $\pi$  dans l'interférence (tension généralement appelée  $V_\pi$ ).

Une modélisation simple mais assez réaliste de la dynamique d'un tel oscillateur peut être faite à l'aide de l'équation intégréo-différentielle non linéaire à retard suivante :

$$\tau \frac{dx}{dt}(t) + x(t) + \frac{1}{\theta} \int_{t_0}^t x(s) ds = \beta \cos^2[x(t-T) + \Phi], \quad (1)$$

où  $\beta$  représente le gain de la chaîne d'oscillation qui dépend de la sensibilité de la photodiode en sortie de fibre, de l'amplification électronique, de la tension demi-onde  $V_\pi$  du modulateur, et de la puissance  $P_0$  du laser illuminant le modulateur. Les constantes de temps  $\theta \simeq 0.35$  ps et  $\tau \simeq 8$  ns sont caractéristiques de la dynamique d'oscillateur harmonique déjà décrite, elles vérifient  $Q = \sqrt{\tau/\theta}$  et  $T_0 = 2\pi\sqrt{\theta\tau}$ .

## 2 Échelles de temps multiples

Connaissant la solution expérimentale *a priori* du régime d'oscillation périodique, nous ré-écrivons l'équation dynamique d'origine à l'aide d'un changement de variable qui normalise le temps par rapport à la période d'oscillation, soit  $s = t/\sqrt{\tau\theta}$ . La petite quantité  $\varepsilon = 1/Q$  permet de mieux mettre en évidence la solution harmonique à l'échelle de temps rapide  $s$ , ainsi qu'une échelle de temps lente  $\xi = \varepsilon s$ . L'équation physique de départ (1) peut alors se ré-écrire sous forme différentielle :

$$\frac{d^2x}{ds^2}(s) + x(s) = +\varepsilon \frac{d}{ds} \left\{ -x(s) + \beta \cos^2[x(s-S) + \Phi] \right\}, \quad (2)$$

équation pour laquelle nous cherchons naturellement une solution du type  $x(s, \xi) = x_0(s, \xi) + \varepsilon x_1(s, \xi)$ . Les deux termes de la solution à échelle de temps multiples peuvent être explicités en les injectant dans (2), en considérant les deux échelles de temps comme des variables indépendantes, et en annulant les deux premiers ordres en  $\varepsilon$  qui en résultent :

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial s^2} + x_0 = 0 \quad \text{soit} \quad x_0(s, \xi) = A(\xi) \cos[s + \psi(\xi)] \quad (3)$$

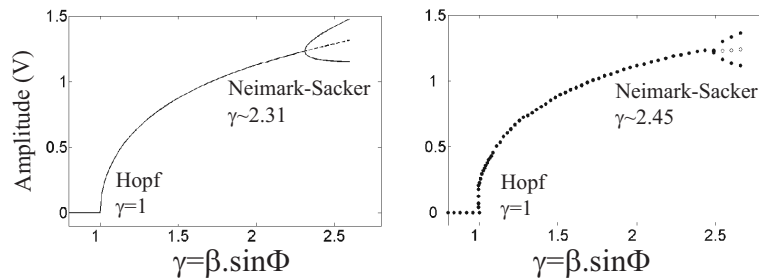
$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial s^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial s \partial \xi} - \frac{\partial x_0}{\partial s} - \beta \frac{\partial x_0}{\partial s} (s-S) \sin[2(x_0(s-S) + \Phi)]. \quad (4)$$

L'évaluation de (4) qui comprend la non linéarité du processus dynamique, et l'annulation des termes séculaires que cette équation présente, permet de dériver une dynamique d'enveloppe complexe  $\mathcal{A} = A e^{i\psi}$  de la solution oscillant à la période  $T_0$  (en revenant au temps réel  $t$ ) :

$$2\tau \dot{\mathcal{A}}(t) + \mathcal{A}(t) = -\gamma J_1[|\mathcal{A}(t-T)|] e^{i(\psi(t-T) - 2\pi T/T_0)}, \quad (5)$$

où  $J_1[.]$  est la fonction de Bessel classique, qui apparaît par filtrage du seul harmonique issu de la non linéarité du modulateur de Mach-Zehnder à l'intérieur de la bande de fréquence du processus dynamique résonant. Le facteur  $\gamma$  correspond au gain dynamique de la fonction de modulation du Mach-Zehnder, soit  $\gamma = \beta \sin \Phi$ .

À la dynamique de phase près  $\psi(t)$ , l'équation différentielle non linéaire à retard est de la même famille que les dynamiques scalaires à retard généralement étudiées dans la littérature [3]. Moyennant quelques hypothèses simplificatrices concernant le régime de point fixe stable, il est possible de découpler les dynamiques d'amplitude de  $A(t)$  et de phase de  $\psi(t)$ , afin d'aborder une analyse de stabilité de l'amplitude, telle que décrite dans [4] pour le cas des dynamiques scalaires à grand retard. Il est important de noter que cette dynamique scalaire non linéaire à retard dérivée, et non intrinsèque, est issue d'une dynamique à retard initiale de type intégré-différentielle, faisant intervenir un processus dynamique sélectif en fréquence. Le temps caractéristique (lent)  $2\tau$  finalement obtenu pour la dynamique scalaire à retard d'amplitude, est pratiquement défini par l'inverse de la sélectivité spectrale du processus dynamique résonant ( $2/(\Delta f) = 2QT_0$ ).



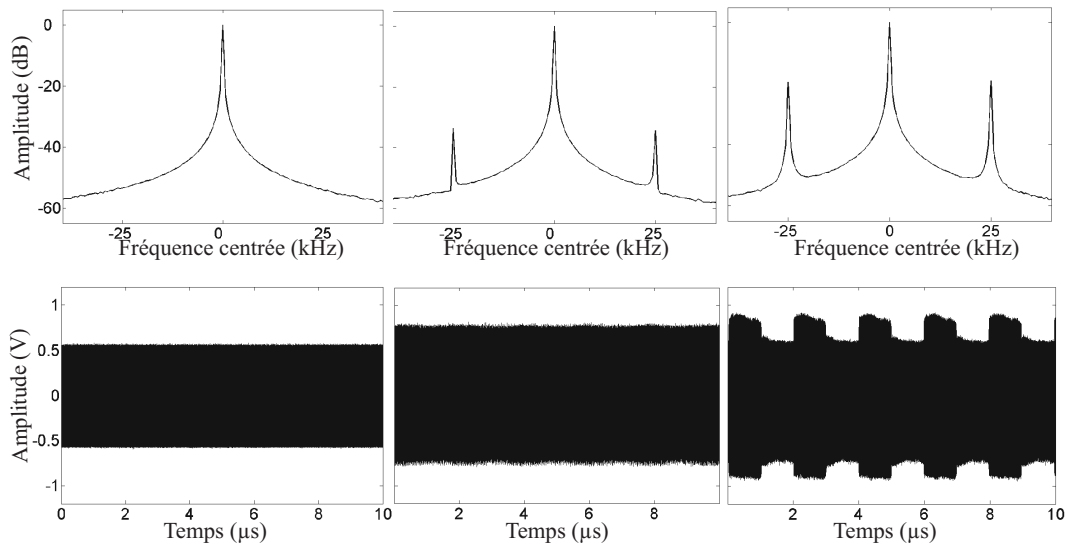
**Fig.2.** Diagramme de bifurcation de l'amplitude micro-onde (gauche : numérique, droite : expérimental).

Lors de l'analyse de stabilité d'amplitude, il apparaît que, contrairement à ce qui était admis, pour des gains d'oscillation suffisamment importants (dans la partie décroissante de la fonction de Bessel  $J_1$ , où la pente devient suffisamment forte et négative), la solution de point fixe en amplitude perd sa stabilité, et l'oscillation micro-onde subit une bifurcation de Neimark-Sacker. La bifurcation de Hopf bien connue pour ce système à retard, et donnant naissance à l'oscillation micro-onde pour  $\beta = 1$ , est donc suivie par une telle bifurcation secondaire pour  $\beta \simeq 2.31$ , qui correspond pratiquement à l'apparition d'un cycle limite aux temps lents de l'enveloppe micro-onde, c'est à dire à une auto-modulation d'amplitude avec une période  $2T$  de l'oscillation micro-onde de période  $T_0 \ll 2T$  (voir figure 2).

### 3 Résultats expérimentaux

Le montage expérimental est celui décrit dans la section 1, avec les valeurs numériques indiquées. Le filtre sélectif en fréquence réalise le processus dynamique résonant, avec une fréquence centrale de 3 GHz, et une largeur de bande à -3 dB de 20 MHz environ. Le modulateur de Mach-Zehnder est conçu pour fonctionner à des débits télécom de 20 Gb/s, avec une bande passante analogique de l'ordre de 18 GHz, avec un  $V_\pi$  de l'ordre de 4,5 V. La diode laser nous permet de disposer de plus de 20 mW optique. Une fibre télécom standard (SMF28) de 4 km nous permet de produire un retard "pur" de 20  $\mu$ s. La photodiode utilisée est pré-amplifiée, avec un gain de conversion de l'ordre de 2,2 V/mW, et avec une bande passante de plus de 14 GHz. Un amplificateur de puissance RF large bande (30 kHz à 25 GHz) capable de délivrer près de 26 dBm (environ 12V crête à crête), avec un gain de 18 dB (amplification x8) nous permet d'atteindre expérimentalement des gains normalisés  $\beta$  suffisamment élevés (jusqu'à 4-5).

L'enregistrement de la trace temporelle correspondant à l'oscillation micro-onde est rendue possible grâce à l'utilisation d'un oscilloscope numérique à 6 GHz de bande passante, fonctionnant à 40 Géch/s, avec une profondeur mémoire d'enregistrement de la trace de 16 millions de points. Les traces temporelles



**Fig.3.** Traces temporelles (au dessus) et spectres correspondants (en bas) pour différentes valeurs du gain.

enregistrées pour 3 valeurs différentes du gain (pratiquement ajusté par la puissance optique du laser) sont représentées à la figure 3, avec le calcul de leur spectre par transformée de Fourier rapide. On a pu ainsi clairement identifier l'apparition des raies latérales de modulation, à des fréquences décalées de  $1/(2T)$  par rapport à la porteuse micro-onde. L'allure temporelle en régime fortement non linéaire laisse apparaître une enveloppe quasi-rectangulaire sur l'oscillation micro-onde, comme dans le cas des dynamiques d'Ikeda ou Mackey-Glass.

## 4 Conclusion

Une dynamique intégró-différentielle non linéaire à très grand retard, à forte résonance, a été présentée. Une étude analytique de stabilité de l'oscillation à laquelle elle donne lieu, a été effectuée à l'aide d'une approche à échelle de temps multiples : le temps court correspond à la période propre de la résonance, et le temps long correspond à son facteur de qualité. Un temps encore plus long, correspondant au grand retard temporel impliqué dans le processus d'oscillation, se manifeste par la période  $T_2$  qui apparaît lors de la perte de stabilité de l'enveloppe de l'oscillation rapide.

Les architectures pratiques concernées par cette étude sont étudiées dans le contexte d'une nouvelle génération d'oscillateurs micro-ondes, qui présentent le potentiel d'une grande pureté spectrale. Les implications de ces phénomènes d'instabilité en termes de pureté spectrale sont à l'étude, dans le cadre d'un projet ANR O<sup>2</sup>E (Oscillateurs Opto-Electroniques).

## Références

1. X. S. YAO AND L. MALEKI, High frequency optical subcarrier generator, *Electronics Letters*, **30** (18), 1525-1526 (1994).
2. A. ARGYRIS *et al.*, Chaos-based communications at high bit rates using commercial fiber-optic links, *Nature*, **438**, 343-346 (2005).
3. J. D. FARMER, Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system, *Physica D*, **4**, 366-393 (1982).
4. T. ERNEUX, L. LARGER M.W. LEE AND J.-P. GOEDGEBUER, Ikeda Hopf bifurcation revisited, *Physica D*, **194**, 49-64 (2004).