

Robustesse d'une reconstruction du portrait de phase et observabilité

Christophe Letellier¹, Robert Gilmore², & Luis A. Aguirre³

¹ CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

² Physics Department, Drexel University, Philadelphia, Pennsylvania 19104, USA

³ Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, M.G., Brazil

Christophe.Letellier@coria.fr

Résumé. Un test topologique est proposé pour l'estimation de la qualité de la reconstruction du portrait de phase. Il est ici utilisé pour montrer la dépendance de celle-ci au choix de la variable et pour estimer l'observabilité de la dynamique directement à partir d'une série temporelle. Il est montré que le choix du décalage temporel n'est pas anodin et qu'il ne peut être varié sur des plages aussi grandes qu'il est habituellement annoncé.

Abstract. A simple topological test is proposed to estimate the quality of the phase space reconstruction. It is used to show how the reconstruction depends on the choice of the observable and to estimate the observability of the dynamics, directly from a time series. It is shown that the choice of the time delay is quite sensitive and that it cannot be varied over intervals as large as commonly announced.

1 Introduction

La reconstruction de l'espace des phases à partir de la connaissance de l'évolution d'une seule grandeur physique est l'étape qui conditionne le plus souvent l'ensemble de l'analyse de la dynamique sous-jacente du système étudié. Le théorème de Takens [1] est toujours invoqué pour se rassurer en se disant qu'il suffit d'augmenter la dimension de l'espace reconstruit pour être assuré d'avoir un espace difféomorphiquement équivalent à l'espace original. Malheureusement, notre compréhension fine de la structure de l'espace des phases se limite aux espaces tri-dimensionnels et augmenter la dimension de l'espace reconstruit n'offre que peu d'avantage. De plus, il a été montré que la qualité de l'espace reconstruit dépend fortement de l'observable utilisée [2]. Cette dépendance dérive directement des propriétés du changement de variables entre l'espace des phases original et l'espace des phases reconstruit [3] : la perte d'observabilité résulte essentiellement de l'existence de singularités au sein du changement de variables qui interdisent l'observation d'un ensemble plus ou moins limité de l'espace original. Malheureusement, l'estimation de l'observabilité de l'espace des phases original à partir d'une variable donnée ne pouvait être obtenu que lorsque les équations du système étaient connues ; en d'autres termes, il n'était pas possible d'estimer le degré de confiance que nous pouvions avoir en une série de mesures.

Toutes les tentatives dérivées de la théorie du contrôle sont par essence vouées à l'échec. La brèche est venue par la topologie d'une manière assez inattendue. Récemment, deux d'entre nous ont introduit un test topologique pour décider si le portrait de phase reconstruit constitue un plongement ou non [4]. Typiquement, ce test repose sur la distance minimum entre deux orbites périodiques données et sur l'estimation des nombres d'enlacement entre celles-ci. Nous montrons ici comment ce test topologique peut être utilisé pour estimer, de manière relative, l'observabilité de l'espace des phases à partir de séries temporelles et ce, sans connaître les équations du système sous-jacent.

2 Système de Rössler

Nous commençons par considérer le système de Rössler défini par les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (1)$$

avec des paramètres respectivement pris égaux à $a = 0.432$, $b = 2$ et $c = 4$. L'attracteur chaotique alors solution est unimodal, c'est-à-dire qu'il est caractérisé par une application de premier retour à une section de Poincaré constituée de deux branches monotones séparées par un unique point critique portrait de phase reconstruit à partir de la variable x « mesurée » avec un pas de temps $\delta t = 0.05$ s. La pseudo-période du système étant de 6.02 s, cela correspond à environ 120 points par oscillation autour du point singulier intérieur. Le décalage temporel τ est choisi, à l'œil — ce qui reste encore la méthode la plus fiable — égal à $14\delta t$. L'espace reconstruit est alors représenté par les coordonnées $X_x = x(t)$, $Y_x = x(t + \tau)$ et $Z_x = x(t + 2\tau)$. La section de Poincaré est définie comme $X_x = x_- = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}$ (coordonnée du point singulier intérieur) et $\dot{X}_x > 0$. Les orbites périodiques peuvent alors être codées selon la localisation des points périodiques sur l'application de premier retour : « 0 » pour un point sur la branche croissante et « 1 » pour un point sur la branche décroissante.

Nous avons choisi de travailler avec plusieurs couples d'orbites périodiques. Le premier est formé par les deux orbites de période 5 et codées respectivement par (10110) et (10111), le deuxième est constitué des deux orbites de période 3 (101) et (100), et le troisième des orbites de période 5 (10001) et (10000). Ces trois couples d'orbites correspondent à des orbites créées par une bifurcation nœud-col. Enfin, nous avons utilisé un couple constitué de deux orbites créées par deux bifurcations nœud-col différentes, à savoir les orbites (10001) et (10111). Ces différents choix nous permettront d'expliquer la dépendance des résultats obtenus au choix des orbites utilisées.

Une fois les orbites extraites, la distance minimale entre les orbites de chacun de ces couples est calculée en fonction du décalage temporel utilisé ($\tau \in [0 ; 90]$). Le calcul est répété pour les orbites périodiques codées par les mêmes séquences mais extraites des portraits de phase respectivement reconstruits à partir des variables y et z . Cette dépendance est représentée Fig. 1 pour deux des quatre couples. La distance minimale est normalisée par rapport aux amplitudes maximales observées sur la variable utilisée pour la reconstruction du portrait de phase. Une première constatation peut être faite : les résultats obtenus sont très différents lorsque le portrait de phase est reconstruit à partir de la variable z . La distance minimale est très petite — comparée à celles obtenues dans les espaces reconstruits à partir des variables x et y — et ne dépend que peu du décalage temporel. L'explication la plus évidente est que la distance minimale obtenue, même pour des décalages relativement petits, est de l'ordre de la résolution du portrait de phase en raison de l'échantillonnage en temps des séries temporelles. En d'autres termes, la représentation de la dynamique obtenues à partir de la variable z et ce, quel que soit le décalage temporel utilisé, n'offre qu'un faible pouvoir séparateur des différentes orbites.

Pour les petites valeurs du décalages, le nombre d'enlacement est de +10, comme cela se doit pour ce couple d'orbites périodiques [5]. Le changement de signe — les nombres d'enlacements sont négatifs dans l'espace des phases original — provient simplement du passage d'un triède direct à un triède direct par le changement de coordonnées : ceci n'a aucune conséquence sur la topologie à proprement parler. Malgré cela, la première modification du nombre d'enlacement $Ne(10110,10111)$ ne survient que pour un décalage assez élevé de $\tau = 54\delta t$. À partir de cette valeur du décalage, le nombre d'enlacement change d'une unité à chaque fois que le décalage est augmenté de δt , tandis que le nombre de croisements identifiés dans une projection plane ne cesse d'augmenter. Dans ce cas, même pour le portrait de phase reconstruit à partir de la variable z , ce couple d'orbites peut être reconstruit avec la bonne topologie pour des décalages correspondant à pratiquement la moitié de la pseudo-période ($0.45 T_0$).

Des observations similaires sont obtenues dans les espaces reconstruits à partir des autres variables (x et y). Les valeurs moyennes des distances minimales normalisées sont estimées pour différents couples d'orbites périodiques et pour des décalages répartis sur l'intervalle où le nombre d'enlacement n'est pas affecté ($\tau \in [1 ; 50]$) et sont reportés Tab. 1. Si nous comparons les différentes valeurs moyennes obtenues et, considérant que plus des orbites sont distantes l'une de l'autre, mieux elle résiste aux modifications du portrait de phase sous variations du décalage, la variable y fournit la représentation la plus robuste, suivie par la variable x ; la variable z fournissant sans surprise la distance moyenne la plus faible. De ce point de vue, nous retrouvons le classement des variables par observabilité décroissante, à savoir $y \triangleright x \triangleright z$ [2]. Ce classement se retrouve également lorsque le couple (101)-(100) est utilisé et, de manière un peu moins claire, lorsque le couple (10001)-(10000). Que ce dernier couple offre une moins bonne estimation de la sensibilité n'est pas très surprenant : en les valeurs moyennes sont écrasées vers les petites valeurs. Ceci

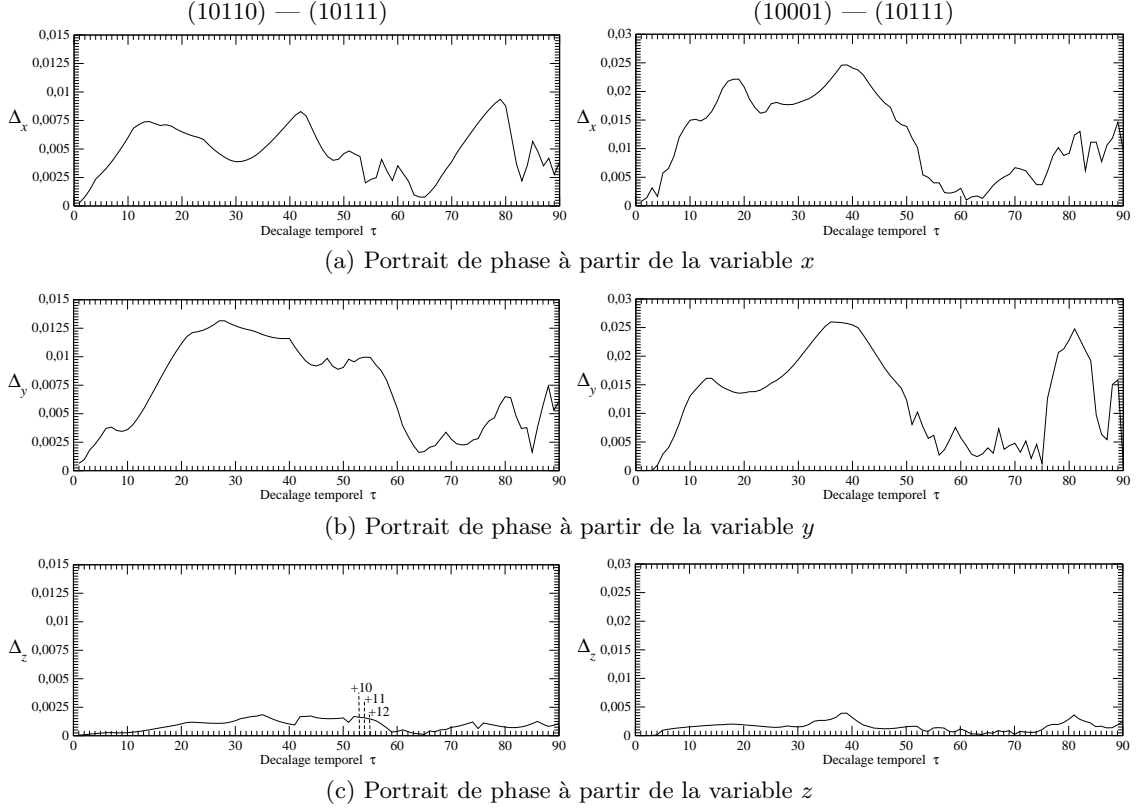


Fig.1. Distance minimale normalisée entre deux orbites de période 5 respectivement codées par (10110) et (10111) — à gauche — et (10001) et (10111) — à droite — estimée en fonction de la valeur du décalage temporel τ . Cas du système de Rössler avec $a = 0.432$, $b = 2$ et $c = 4$.

résulte du fait que ces deux orbites visitent le voisinage du point singulier intérieur, région de l'espace des phases où les points périodiques sont très concentrés (petites valeurs des vecteurs vitesse). Il est donc préférable d'utiliser des orbites ne visitant pas trop le voisinage du point singulier intérieur, zone par ailleurs réputée sensible à la moindre contamination par du bruit.

Tab.1. Valeurs moyennes des distances minimales estimées pour différents couples d'orbites périodiques et pour des décalages τ compris entre 1 et 50. Cas du système de Rössler avec $a = 0.432$, $b = 2$ et $c = 4$.

	(10110) - (10111)	(101)-(100)	(10001)-(10000)	(10001) - (10111)
$\overline{\Delta_x}$	0.0053 ± 0.0018	0.0089 ± 0.0026	0.0008 ± 0.0003	0.0167 ± 0.0061
$\overline{\Delta_y}$	0.0089 ± 0.0039	0.0137 ± 0.0059	0.0008 ± 0.0003	0.0156 ± 0.0072
$\overline{\Delta_z}$	0.0010 ± 0.0005	0.0011 ± 0.0009	0.0002 ± 0.0001	0.0017 ± 0.0008

Le cas du couple (10001)-(10111) mérite d'être un peu discuté. Ces deux orbites ne sont pas issues de la même bifurcation nœud-col. En conséquence, elles visitent de manières très différentes l'espace des phases et seront donc affectées différemment par les modifications du portrait de phase en fonction du décalage choisi. D'une certaine manière ces deux orbites sont un peu extrêmes, l'orbite (10111) plutôt

au début de l'ordre unimodal [5], l'orbite (10001) plutôt à la fin. Une fois encore, ce n'est que pour un décalage de $\tau = 53\delta t$, que le nombre d'enlacement, en principe égal à -5, devient différent. Dans le cas du système de Rössler, la modification des nombres d'enlacement survient donc quasi-simultanément pour l'ensemble des couples d'orbites périodiques qui peuvent être considérés. Par contre, l'utilisation de la distance minimale moyenne comme comparateur de l'observabilité perd de sa fiabilité dans ce dernier cas. Les valeurs obtenues dans les espaces des phases reconstruits respectivement à partir des variables x et y demeurent supérieures à celle obtenue à partir de la variable z , mais la valeur pour la variable x devient supérieure à celle obtenue pour la variable y . Il en résulte que cette distance minimale n'est pertinente pour l'estimation de l'observabilité que lorsqu'elle calculée sur des couples d'orbites périodiques issues de la même bifurcation nœud-col ou, de manière moins contraignante, visitant des régions de l'espace des phases peu différentes.

3 Système de Lorenz

Le système de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (2)$$

est maintenant étudié pour des valeurs des paramètres respectivement égale à $R = 203.5$, $\sigma = 10$ et $b = 8/3$. Ce choix n'est pas anodin. En effet, pour les valeurs habituelles ($R = 28$), l'attracteur est à l'intérieur d'une surface toroïdale de genre 3, ce qui a pour effet de nécessiter une section de Poincaré composite [6]. Notre objectif étant de comparer la faisabilité de notre technique sur deux systèmes différents, nous avons préféré utiliser un attracteur chaotique issu d'une cascade de doublements de période dans les deux cas ; les attracteurs étant enfermés dans des surfaces toroïdales de genre 1, ce qui conduit à une analyse habituelle. Comme pour le système de Rössler, nous utilisons un couple d'orbites que nous avons choisi comme apparaissant assez tôt dans l'ordre unimodal et issu d'une seule bifurcation nœud-col. Le système de Lorenz présentant une symétrie de rotation autour de l'axe Oz , l'une des conséquences majeures est que l'espace des phases reconstruit à partir de la variable z invariante (puisque selon l'axe de rotation), le portrait de phase ne présente non seulement plus de symétrie, mais encore, les orbites de période 3 deviennent des orbites de période 6 ! Aussi, ce sont les orbites de période 3 qui seront étudiées lorsque le portrait reconstruit est issu des variables x ou y et de période 6 lorsque la variable z est mesurée. Les variables sont enregistrées avec un pas de temps δt de 0.003s, ce qui fait environ 170 points par oscillations des foyers intérieurs. Le pas de temps est plus petit relativement à la pseudo-période ($T_0 = 0.51$ s) que pour le système de Rössler ; ceci résulte d'une variabilité plus grande des vitesses sur l'espace des phases et, comme nous le verrons par la suite, les décalages appropriés ne seront pas très grands.

Comme sur le système de Rössler, les dépendances des distances minimales en fonction du choix du décalage sont très différentes d'une variable à l'autre. La variable x présente indéniablement un meilleur pouvoir séparateur que les deux autres, la variable z étant celle dont les capacités sont les plus faibles. Les variables x et z présentent des nombres d'enlacement ne dépendant pas du décalage τ tant que ceux-ci sont respectivement inférieurs à $28\delta t$ et $24\delta t$. La topologie est donc stable tant que le décalage est inférieur à environ à 15% de la pseudo-période, ce qui est peu comparé à l'intervalle habituellement recommandé ($\tau \in [0, T_0/4]$). Ainsi, la borne supérieure habituellement recommandée conduit à une topologie inéquivalente à la dynamique originale. Le cas de la variable y est encore plus critique, puisqu'un décalage aussi petit que $11\delta t$ suffit à modifier la topologie, le nombre d'enlacement $Ne(101111, 101110)$ passant de +3 à +4. Cette grande différence entre les deux variables s'est déjà manifestée lors d'étude de l'observabilité [2]. Notamment, seuls des modèles globaux estimés à partir de la variable x ont pu être obtenus, la variable y se montrant plus que réfractaire à la modélisation. Le classement par observabilité décroissante donne effectivement $x \succ y$ [2].

La modification des nombres d'enlacement est illustrée pour les cas des orbites extraites des portraits de phase reconstruits à partir des variables x et y . La modification du nombre d'enlacement $Ne(101, 100)$ est drastique lorsque le décalage passe de $28\delta t$ à $29\delta t$; le nombre d'enlacement passant de +3 à -4. Cette

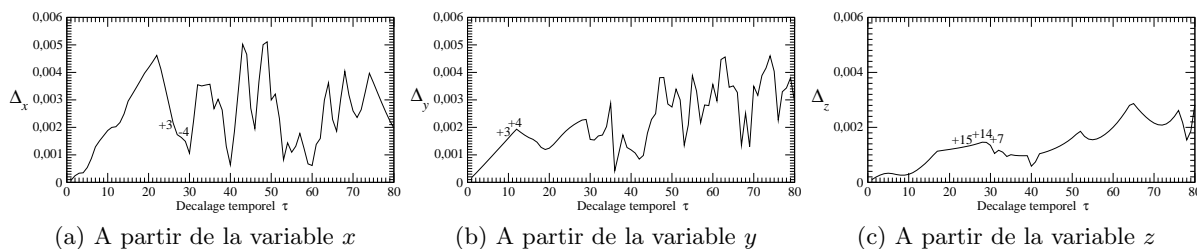


Fig.2. Distance minimale entre deux orbites estimée en fonction de la valeur du décalage temporel τ . Dans le cas des portraits de phase respectivement reconstruits à partir des variables x et y , les orbites sont de période 3 et codées par (101) et (100). Lorsque la variable z est mesurée, les orbites correspondantes sont de période 6 et sont respectivement codées par (101111) et (101110). Cas du système de Lorenz avec $R = 203.5$, $\sigma = 10$ et $b = 8/3$.

modification importante des propriétés provient de la zone inférieure gauche (Fig. 3(b)) où les différentes révolutions sont toutes concentrées dans une petite zone de l'espace des phases. La plus légère modification entraîne de nombreuses permutations entre différents segments des orbites, affectant le nombre d'enlacement. Un pas de temps beaucoup plus petit serait nécessaire pour voir ces modifications survenir une à une. Le cas apparemment plus simple de la variable y révèle des nombres d'enlacement qui diffèrent dès le décalage de $11\delta t$. Nous avons là une preuve de la dépendance de la qualité de la reconstruction au choix de la variable mesurée. En d'autres termes, l'observabilité de la dynamique est un concept également important pour la topologie de l'attracteur reconstruit, un point jamais étudié en détails auparavant. Enfin, les valeurs moyennes des distances minimales normalisées sont respectivement : $\overline{\Delta}_x = 0.0023 \pm 0.0001$, $\overline{\Delta}_y = 0.0014 \pm 0.0005$ et $\overline{\Delta}_z = 0.0008 \pm 0.0005$. Sans surprise, nous retrouvons bien que la variable x offre le portrait de phase le plus robuste à toute perturbation. La variable y vient ensuite, suivie de la variable z . Le fait que la variable z se retrouve derrière les deux premières variables n'est pas en accord avec les estimations des indices d'observabilité [2] mais, comme il a été bien précisé dans des travaux antérieurs, les indices d'observabilité sont incapables de tenir compte de propriétés globales telles que les propriétés de symétrie, propriétés qui pourraient bien être à l'origine de ce désaccord. Par conséquent, la classification $x \triangleright y \triangleright z$ par cette nouvelle méthode est tout à fait opportune.

4 Conclusion

À l'aide d'un simple test topologique, il nous a été possible de montrer que la topologie dépendait également du choix de l'observable, notamment par l'intermédiaire de la robustesse du portrait de phase face à des variations du décalage utilisé pour la reconstruction. Contrairement à ce qui est mentionné dans le cadre du théorème de Takens, le choix du décalage est d'importance et selon le système, la plage où nous sommes assurés d'avoir un plongement de la dynamique original n'est pas si grand. La recommandation habituelle de prendre le décalage aussi petit que possible se retrouve bien ici. La borne supérieure du quart de la pseudo-période se révèle être déjà trop grande dans certains cas comme le système de Lorenz.

Nous avons montré par ailleurs, que l'utilisation de la distance minimale normalisée pouvait être utilisée pour une estimation de l'observabilité de la dynamique à partir d'une série temporelle, une estimation qu'il avait été impossible d'obtenir jusqu'ici en l'absence des équations. Bien sûr cette estimation est relative et permet le classement des différentes variables entre elles ; au moins permet telle de décider entre telle ou telle variable à notre disposition.

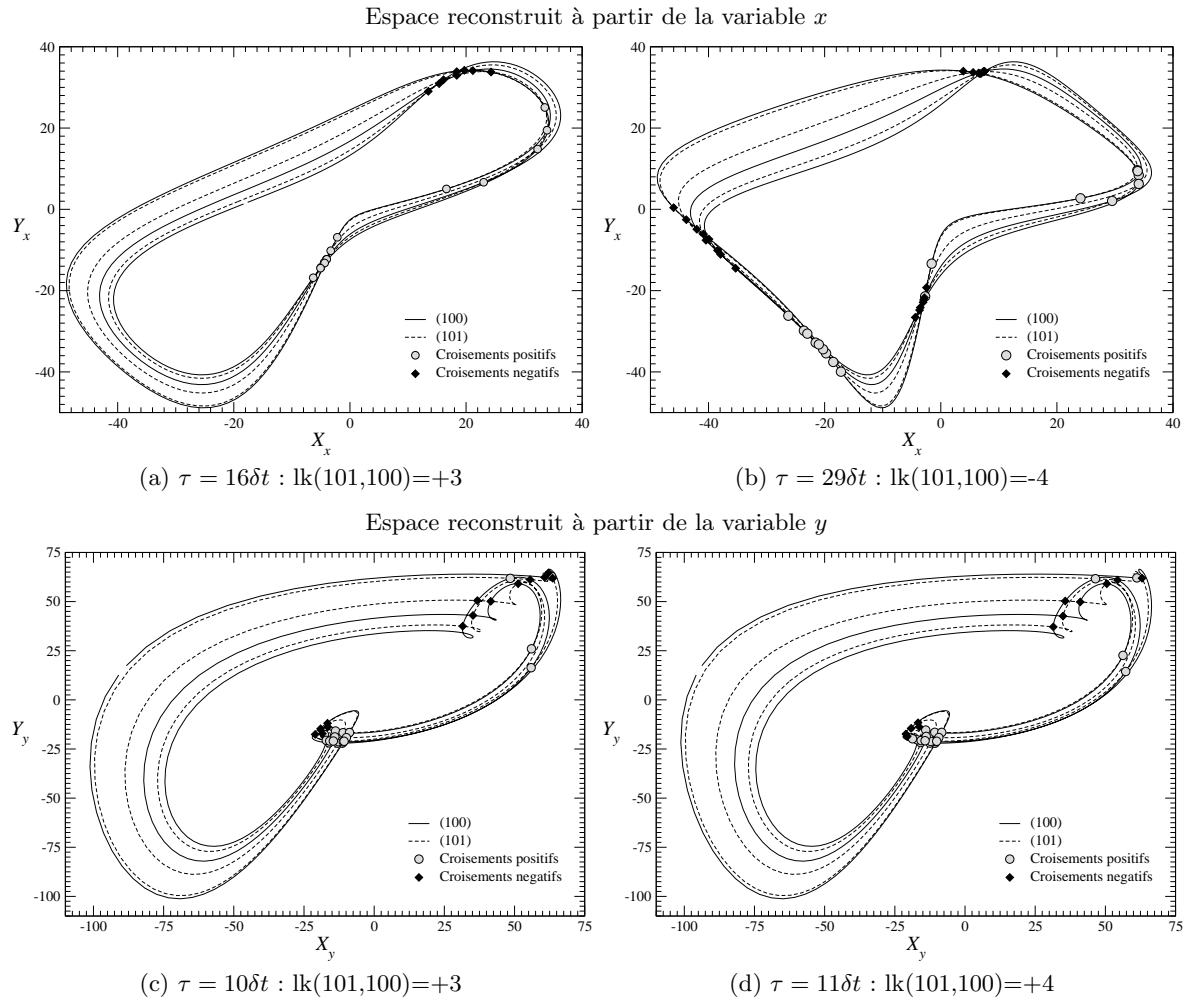


Fig.3. Lien entre les deux orbites de période 3 extraite de l'attracteur solution du système de Lorenz pour les valeurs des paramètres suivantes : $R = 203.5$, $\sigma = 10$ et $b = 8/3$. Les deux nombres d'enlacement sont différents, les attracteurs reconstruits ne sont donc pas topologiquement équivalents. Cas du système de Lorenz avec $R = 203.5$, $\sigma = 10$ et $b = 8/3$.

Références

1. F. TAKENS, Detecting strange attractors in turbulence, *Lecture Notes in Mathematics*, **898**, 366-381, 1981.
2. C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Investigating nonlinear dynamics from time series : the influence of symmetries and the choice of observables, *Chaos*, **12**, 549-558, 2002.
3. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & J. MAQUET, Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Physical Review E*, **71**, 066213, 2005.
4. C. LETELLIER, I. M. MOROZ & R. GILMORE, A topological test for embedding, *Physics Review Letters*, soumis.
5. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282, 1995.
6. G. BYRNE, R. GILMORE & C. LETELLIER, Distinguishing between folding and tearing mechanisms in strange attractors, *Physical Review E*, **70**, 056214, 2004.