

Etats stationnaires, théorèmes de fluctuation-dissipation et température effective dans un écoulement de von Karman turbulent

R. Monchaux¹, P.-H. Chavanis², A. Chiffaudel¹, F. Daviaud¹, & B. Dubrulle¹

¹ Service de Physique de l'État Condensé, DSM, CEA Saclay, CNRS URA 2464, 91191 Gif-sur-Yvette, France

² Laboratoire de Physique Théorique (UMR 5152), Université Paul Sabatier

118, route de Narbonne 31062 Toulouse, France

romain.monchaux@cea.fr

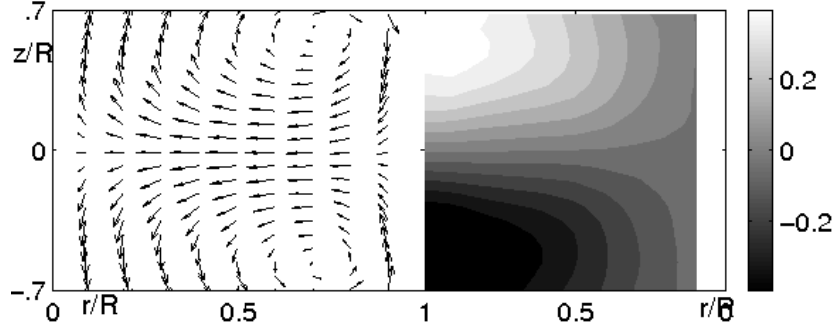
Résumé. Une question non résolue de la physique statistique est de savoir si certains systèmes hors équilibre partagent des propriétés avec les états d'équilibre classiques. La turbulence est un bon cadre pour étudier cette question. En effet, les écoulements incompressibles soumis à un forçage statistiquement stationnaire atteignent en général une sorte d'état d'équilibre (au sens statistique), indépendant des conditions initiales. Depuis Onsager, on rêve de décrire la turbulence à l'aide d'outils issus de la mécanique statistique. En 2D, les équilibres des équations de Navier-Stokes ont été classifiés à l'aide de principes de mécanique statistique par Robert *et al.* Des progrès plus récents ont été faits dans l'étude des écoulements axisymétriques (une situation intermédiaire entre 2D et 3D) par Leprovost *et al.*. Nous présentons des résultats obtenus dans le cadre d'un écoulement de von Kármán.

Abstract. A yet unanswered question in statistical physics is whether stationary out-of-equilibrium systems share any resemblance with classical equilibrium systems. A good paradigm to explore this question is offered by turbulent flows. Incompressible flows subject to statistically stationary forcing generally reach a kind of equilibrium (in the statistical sense), independent of the initial conditions. Description of turbulence with tools borrowed from statistical mechanics is a long-standing dream, starting with Onsager. In 2D, equilibrium states of the Navier-Stokes equations have been classified through statistical mechanics principle by Robert and his collaborators. More recent advances have been recently made for 3D axisymmetric flows (an intermediate situation between 2D and 3D) by Leprovost *et al.* We present results obtained in the framework of a von Kármán flow.

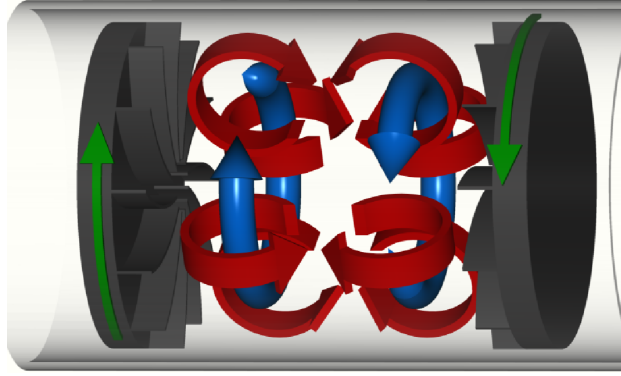
Une question ouverte de la physique statistique est de savoir si les systèmes hors-équilibre partagent des propriétés avec les systèmes classiques à l'équilibre. La turbulence offre un bon cadre pour chercher des réponses à cette question. Les écoulements incompressibles soumis à un forçage statistiquement stationnaire atteignent en général une sorte d'état d'équilibre (au sens statistique du terme), indépendant des conditions initiales. Décrire la turbulence avec des outils empruntés à la mécanique statistique est un vieux rêve depuis les travaux d'Onsager. En 2D, les états d'équilibre des équations de Navier-Stokes ont été classifiés à l'aide de principes de mécanique statistique par Robert et ses collaborateurs [1,2]. Des progrès plus récents ont été faits dans l'étude des écoulements axisymétriques (une situation intermédiaire entre 2D et 3D) par Leprovost *et al.* [3]. Dans la suite, nous présentons des résultats obtenus dans le cadre d'un écoulement de von Kármán.

1 Etats stationnaires axisymétriques

On se place dans la limite de l'équation d'Euler pour un écoulement turbulent dans lequel le forçage et la viscosité sont négligés. Dans cette limite, un écoulement axisymétrique est caractérisé par un ensemble de grandeurs globales conservées comme l'énergie et l'hélicité. De plus, pour des raisons de symétries, on montre la conservation du moment cinétique le long d'une ligne de courant résultant en un théorème de Liouville et en la conservation de grandeurs globales supplémentaires comme les casimirs du moment cinétique. Ceci permet de définir une entropie de mélange et la dérivation d'un état de Gibbs pour le



(a) Profil de vitesse



(b) schéma des deux cellules de recirculation

Fig.1. (a) Profil de vitesse à $Re = 5 \times 10^5$: contour en niveau de gris pour la composante azimutale, représentation avec des vecteurs de la partie poloïdale d'un écoulement de von Kármán généré par deux turbines contra-rotatives dans un cylindre. Le rayon et la hauteur du cylindre sont respectivement : $R = 100$ mm et $H = 180$ mm. Les turbines sont constituées de disques d'inox sur lesquels sont soudés un nombre variable de pales courbées. Pour plus de détails, nous renvoyons à Ref. [4]. A la fréquence f , le nombre de Reynolds est $Re = 2\pi f R^2 \nu^{-1}$ avec ν la viscosité cinématique de l'eau. L'écoulement moyen est divisé en deux cellules de recirculation toriques séparées par une couche de cisaillement. Les mesures de vitesse sont faites à l'aide d'un système de vélocimétrie par imagerie de particule stéréoscopique (SPIV) fournit par DANTEC.

problème en maximisant cette entropie sous contrainte des grandeurs conservées. A partir de l'état de Gibbs, on peut dériver des relations générales caractérisant les états stationnaires [3,5] :

$$\sigma = F(\Psi); \quad \xi - \frac{FF'}{r^2} = G(\Psi); \quad \text{avec } \xi = \omega_\theta/r, \quad (1)$$

où F et G sont deux fonctions arbitraires liées aux lois de conservation du système, σ est le moment cinétique, ψ la fonction de courant et ω_θ la composante azimutale de la vorticité. De plus, $r^{-1}\partial_r(r^{-1}\partial_r\psi) + r^{-2}\partial_z^2\psi = -\xi$.

Nous avons vérifié l'existence de relations similaires pour les  tats stationnaires d'un écoulement de von K rman expérimental pour différents types de turbines et dans une grande gamme de nombres de Reynolds (de 100 à 314000). Le dispositif expérimental est décrit en figure (1). Un résultat représentatif de l'ensemble de nos mesures est donné en figure (2). Bien que la dispersion sur l'ensemble du cylindre soit trop grande pour permettre d'identifier une fonction F , les données correspondant aux points de mesure éloignés des parois et des turbines se regroupent le long d'une fonction de type cubique

$$F(\Psi) = p_1\Psi + p_3\Psi^3$$

qui peut être ajustée par deux paramètres. Cet ajustement est ensuite utilisé pour déterminer G de la même façon.

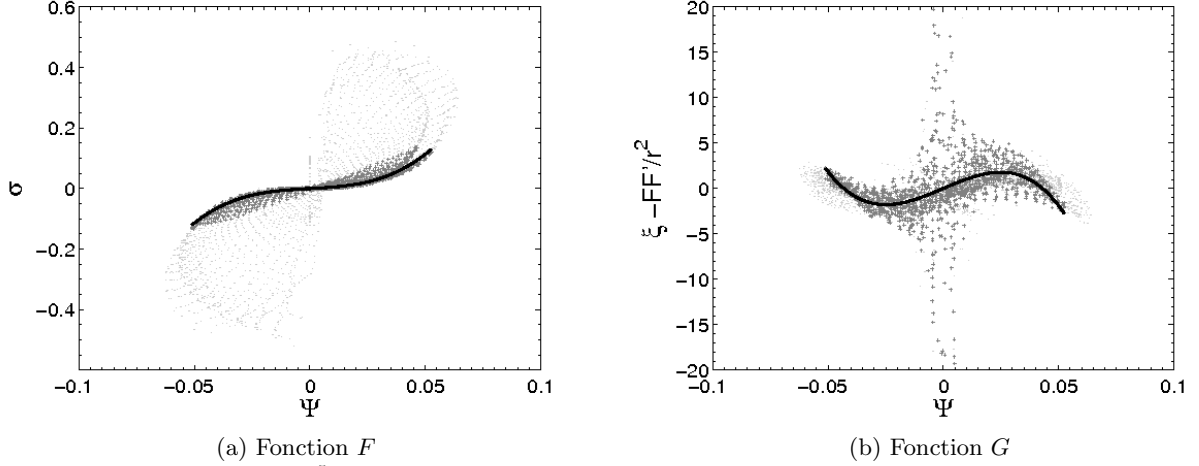


Fig.2. F et G à $Re = 5 \times 10^5$. Les points gris clairs correspondent à l'ensemble de l'écoulement, les croix gris foncé à 50% de l'écoulement : $r/R \in [-0.6; 0.6]$, $z/R \in [-0.4; 0.4]$ et le trait noir épais à l'ajustement cubique.

Nous avons trouvé par ailleurs que les fonctions F et G dépendent de la forme des turbines et du nombre de Reynolds. Par exemple, avec un autre type de turbines, F (resp. G) tend à être linéaire (resp. nulle) à mesure que le nombre de Reynolds augmente [5]. Ceci peut être interprété comme une manifestation indirecte de la « Beltramization » de l'écoulement, c'est-à-dire de la réduction des non-linéarités.

2 Fluctuations

Dans la limite de Beltrami, l'état de Gibbs des équations d'Euler peut être utilisé pour dériver deux relations de fluctuation entre les solutions stationnaires et leurs fluctuations :

$$\begin{aligned} \overline{(\mu\sigma)^2} - \overline{\mu\sigma}^2 &= -\frac{\delta\overline{\mu\sigma}}{\delta\xi} = \frac{\mu^2}{\beta} r^2, \\ \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2 &= -\frac{\delta\overline{\xi}}{\delta\mu\sigma} = \frac{\beta}{\mu^2} \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

où β^{-1} est une température effective et μ une susceptibilité vorticale (les paramètres de Lagrange respectivement associés à l'énergie et l'hélicité). Nous avons également testé ces deux relations dans notre expérience. Les résultats sont présentés sur la figure (3). Une fois de plus, ces relations sont satisfaites au cœur de l'écoulement. Température et susceptibilité vorticale peuvent être mesurées à partir des paramètres des ajustements. L'étude de la dépendance de ces grandeurs thermodynamiques avec le nombre de Reynolds et la forme du forçage est en cours [6].

Références

1. J. SOMMERIA & R. ROBERT, *J. Fluid Mech.*, **229**, 291 (1991).
2. P. H. CHAVANIS, *Phys. Rev. E*, **68**, 036108 (2003).
3. N. LEPROVOST, B. DUBRULLE & P. H. CHAVANIS, *Phys. Rev. E*, **73**, 046308 (2006).

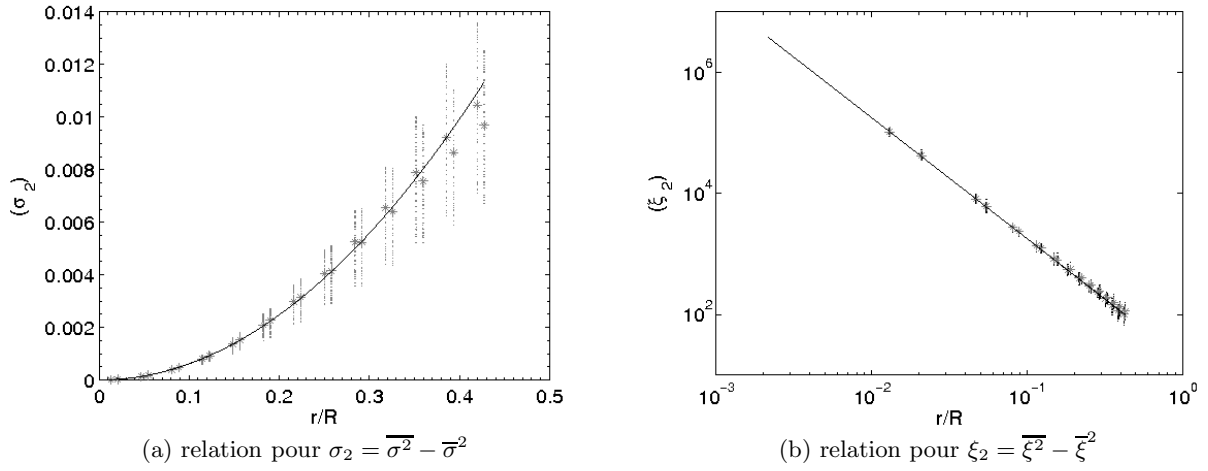


Fig.3. Relations de fluctuations à $Re = 5 \times 10^5$ avec le même fenêtrage en r et z que sur la figure 2. Les petits points correspondent aux données expérimentales pour toutes les valeurs de z/R , les étoiles correspondent aux moyennes sur z à r fixé, la ligne est un ajustement en $(r/R)^2$ (resp. $(R/r)^2$).

4. F. RAVELET, L. MARIÉ, A. CHIFFAUDEL & F. DAVIAUD, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 164501 (2004).
5. R. MONCHAUX *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 124502 (2006).
6. R. MONCHAUX *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, soumis.