

Cohérence des branchements dendritiques en solidification directionnelle

Alain Pocheau, Simona Bodea, & Marc Georgelin

IRPHE, CNRS & Universités Aix-Marseille I & II, 49 rue Joliot-Curie, B.P. 146, Technopôle de Château-Gombert, F-13384 Marseille, Cedex 13, France
alain.pocheau@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. En pratique, la solidification d'un alliage liquide s'opère souvent par croissance de microstructures arborescentes, les dendrites, dont les propriétés spatio-temporelles conditionnent celles du matériau résultant. Ces formes branchées correspondent à l'émission répétée de branches latérales à la pointe d'un doigt en croissance. Une question essentielle concerne leur régularité : y a-t-il un ordre dans les dendrites ? Nous montrons ici expérimentalement que les émissions dendritiques sont étonnamment cohérentes en solidification directionnelle. En particulier, près du seuil dendritique, les émissions se regroupent par paquets à l'intérieur desquels les branchements présentent une forte cohérence, largement inattendue. En revanche, comme dans la lumière naturelle, les paquets sont décorrélés en durée et en origine de phase. Ceci conduit à deux échelles de temps : une échelle longue et bruyante d'émission en paquets ; une échelle courte et cohérente d'émission de branchements. L'origine et le mécanisme des émissions en paquets et de la cohérence des branchements restent à élucider.

Abstract. In practice, solidification of a melt alloy often proceeds by growth of branched microstructures, the dendrites, whose spatio-temporal properties drive those of the solidified material. These branched forms involve the repetitive emission of lateral branches from the tip of a growing digit form. An outstanding issue refers to the regularity of this growth mode : is there any order in dendrites ? We show here experimentally that the dendritic emissions are surprisingly coherent in directional solidification. In particular, close to the onset of sidebranching, the emissions are grouped by bursts within which branches show an unexpected large coherence. However, as in natural light, the bursts are uncorrelated in length and in phase origin. This therefore yields two time scales : a long, noisy, scale of burst emission ; a short, coherent, scale of branch emission. The origin and the mechanism of both remain to be explained.

1 Introduction

Hormis les cristaux formés par épitaxie ou les alliages créés par frittage, les matériaux métalliques qui nous entourent sont issus d'une phase liquide à partir de laquelle ils se sont solidifiés. Les exemples vont des plaquettes de silicium utilisés en micro-électronique aux câbles de traction des téléphériques sans oublier les minerais issus de la solidification du magma terrestre. Ceci souligne l'importance naturelle et technologique du processus de solidification. En pratique, celui-ci met en jeu des interfaces solide-liquide dont la progression dans la phase liquide traduit la solidification croissante du milieu.

En dehors de conditions particulièrement contrôlées, ces interfaces de croissance développent en pratique des instabilités morphologiques conduisant à des microstructures de solidification [1,2]. Celles-ci correspondent à des interfaces en formes de doigt (cellules, doublons ou triplons), en général branchées : les dendrites (Fig.1-a). Ces formes d'interface resteraient cependant anecdotiques si elles ne s'accompagnaient de la formation d'inhomogénéités de concentration du solide formé. Celles-ci résultent du fait qu'une interface non-plane n'est pas une surface d'iso-concentration en soluté de la phase liquide. Sa croissance conduit alors à une modulation de concentration de la phase solide directement associée à ses modulations géométriques, et qui demeure figée dans le matériau solidifié, eu égard à la très faible diffusivité en soluté qui y règne. Par ce processus dit de "microségrégation", le matériau garde ainsi mémoire des détails morphologiques de l'interface de solidification dont il est issu. De cela découle l'intérêt pratique, notamment en métallurgie, de la détermination des caractéristiques spatio-temporelles des microstructures de solidification.

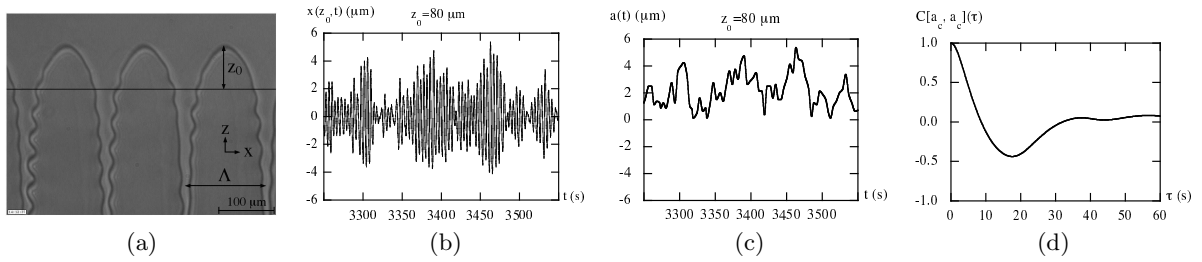


Fig.1. Branchement dendritique à $V = 15\mu\text{m s}^{-1}$ et auto-corrélation du signal d'enveloppe $a(t)$. (a) Les signaux sont obtenus par intersections successives de l'axe x avec l'interface dendritique, à une distance $z_0 = 80\mu\text{m}$ de la pointe des dendrites. (b) Partie du signal $x_L(t)$ extrait du flanc gauche de la dendrite de gauche. Il montre des branchements de durée $T_S = 4.2$ s regroupés en bouffées de 4 à 15 branchements. (c) Enveloppe du signal (b). (d) Fonction d'auto-corrélation $C[a_c, a_c](\tau)$ de l'enveloppe centrée $a_c = a - \bar{a}$ du signal complet. Le temps de cohérence $\tau_a \approx 33$ s ne s'étend pas au delà de la durée moyenne des bouffées $T_B \approx 35$ s. Ceci révèle l'absence de corrélation dans la distribution des bouffées.

Parmi les différents modes d'instabilités des interfaces de solidification, l'un domine en pratique l'espace des paramètres. Il s'agit du mode dendritique responsable de l'omniprésence des structures de solidification branchées dans notre environnement, depuis les flocons de neige et les figures de givre aux microstructures des métaux aux échelles de la centaine de microns. Ce mode consiste en l'émission récurrente de protrusions depuis la pointe d'un doigt en croissance. Leur croissance associée à celle du doigt sous-jacent conduit au développement de branchements qui défilent sur les cotés de cette "dendrite" (Fig.1-a). Une question importante émerge alors quant au type d'organisation de cette forme de croissance : est-elle ordonnée ou désordonnée ? En particulier, les émissions dendritiques de branchements sont elles coordonnées ou désynchronisées ?

Outre les implications technologiques quant à la production de matériaux "ordonnés", l'ubiquité des formes branchées dans les systèmes de croissance donnent à cette interrogation un relief plus général. Elle s'apparente notamment à la question de l'origine de la régularité de l'inflorescence des méristems, précurseur de la phylotaxie. Elle interpelle également sur la possible régularisation des croissances dendritiques neuronales ou d'électrodéposition. Elle interroge enfin sur la possibilité d'auto-organisation spontanée des interfaces de croissance aux échelles mésoscopiques.

L'expérience que nous avons réalisée a trait à l'étude de la cohérence des branchements émis par des dendrites en solidification directionnelle [3]. Un matériau plastique transparent, le succinonitrile, est utilisé pour réaliser une croissance dendritique observable en direct, *in situ* et de manière non intrusive. Un signal temporel représentatif des émissions dendritiques est extrait des images de croissance et analysé par traitement de corrélation. Il conduit à la mise en évidence d'une cohérence étonnamment large des branchements à l'intérieur de bouffées d'émissions par ailleurs décorréelées en phase et en durée.

2 Expérience et observations

Le dispositif expérimental [4] vise à pousser à vitesse contrôlée un échantillon mince du mélange à solidifier dans un gradient de température [5]. Celui-ci est créé par des fours chauffés par une feuille de résistance et placés en regard de refroidisseurs composés de modules à effet Peltier. Leur régulation électronique assure une stabilité des températures à $0,05^\circ\text{C}$ près. Un espacement de 10mm entre ces parties à 100°C et 10°C conduit à un gradient thermique effectif de 78K.cm^{-1} . La translation de l'échantillon dans ce gradient est assurée par un moteur pas à pas de 6400 pas par tour entraînant une vis de pas 5mm couplée à un écrou à recirculation de roulement. La position de l'échantillon est mesurée en permanence par un dispositif interférométrique de type Michelson. Ceci permet d'optimiser le dispositif et d'attester en permanence de la constance de la vitesse de poussée à 3% près sur un tour de vis. L'échantillon, de dimensions 20cm, 50mm, $50\mu\text{m}$, est rempli d'un mélange succinonitrile-éthylène dont la transparence

permet l'observation directe des formes de croissance par ombroscopie. La précision obtenue atteint la limite de diffraction, $0.5\mu\text{m}$.

Le mélange utilisé présente les caractéristiques suivantes : température de fusion du succinonitrile pur $T_0 = 58^\circ\text{C}$, diffusivité thermique $D = 1.35 \times 10^3 \mu\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, coefficient de partage $k = 0.3$, pente du liquidus $m = 1.72 \text{mol}\% \cdot \text{K}^{-1}$, concentration en soluté $c_\infty = 1.5 \text{mol}\%$ [4]. Il met en jeu une interface rugueuse qui reproduit, à plus basse température, un analogue de la solidification des métaux. Pour éviter de forcer une dissymétrie des dendrites, on sélectionne par fusion/solidification un mono-grain présentant des axes de croissance préférentielle parallèles à la vitesse de poussée et à l'épaisseur de l'échantillon. Ce dernier est par ailleurs assez fin, $50\mu\text{m}$, pour n'autoriser qu'une seule couche de dendrite dans son épaisseur.

Lorsque l'on augmente la vitesse de poussée de l'échantillon, le front de solidification, initialement plan, se déstabilise à une vitesse critique $V_c = 1.7\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ en cellules de taille de l'ordre d'une centaine de microns. Ces formes de croissance digitales commencent à émettre des branchements au delà d'une vitesse seuil comprise entre 8 et $15\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ suivant leur taille Λ (Fig.1-a) [4]. Ceci correspond à une instabilité supercritique, l'amplitude des branchements croissant continuellement avec la vitesse de poussée depuis le seuil de branchement. Comme la dendrite avance dans la phase liquide, ses branchements semblent défilier vers ses flancs dans son propre référentiel. Ce faisant, ils grandissent en amplitude, jusqu'à une valeur de saturation.

L'observation des dendrites révèle des émissions de branchements par bouffées de l'ordre de quatre à quinze branchements (Fig.1-b). Suffisamment près de la pointe, ces bouffées sont séparées par des brèves phases non branchées. Les bouffées se manifestent alors par une montée de l'amplitude de branchements, suivie d'un plateau et d'une décroissance avant qu'une autre bouffée ne survienne. Plus loin dans les sillons et suffisamment loin du seuil dendritique, la croissance de l'amplitude des branchements conduit leur bouffées à se recouvrir. Pour la clarté de l'analyse des séries de branchements, nous nous concentrons ici sur le régime de bouffées séparées. Un signal est alors extrait des images de dendrites en repérant les intersections successives $x(z_0, t)$ d'un flanc de dendrite avec un axe parallèle aux isothermes et placé à distance z_0 de sa pointe (Fig.1-a).

Nous décrivons dans la suite un signal typique obtenu sur le flanc gauche d'une dendrite de taille $\Lambda = 150\mu\text{m}$, de vitesse de croissance $V = 15\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et de vitesse de seuil dendritique $9\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, à une distance $z_0 = 80\mu\text{m}$ de sa pointe (Fig.1-a,b). La durée moyenne d'un branchement est $T_S = 4.2\text{s}$ et l'observation s'est étendue sur une heure, soit de l'ordre d'un millier de branchements. La période d'échantillonnage est d'un tiers de seconde, soit $T_S/13$. Les bouffées de branchements, visibles en figure 1-b présentent une durée moyenne $T_B \approx 35\text{s}$, soit environ huit branchements, avec une variabilité importante de l'ordre de cinq branchements. Par ailleurs, alors que les branchements affectent largement la forme de la dendrite, la vitesse de sa pointe reste étonnamment constante à une précision de $0.1\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Deux échelles de temps sont donc présentes dans le phénomène de branchement : une échelle courte, celle du branchement lui-même, $T_S \approx 4\text{s}$, et une échelle longue, celle des bouffées de branchement, $T_B \approx 35\text{s}$. Pour étudier la cohérence du signal sur chacune d'elles, nous extrayons son enveloppe $a(t)$ par interpolation entre maxima (Fig.1-c). On obtient ainsi une décomposition du signal $x(z_0, t) = a(t)s(t)$ sous la forme d'un signal d'enveloppe $a(t)$, positif, variant sur l'échelle T_B et d'un signal de "phase" $s(t)$ variant entre -1 et 1 sur l'échelle T_S . La suite de l'étude se penche sur leurs corrélations propres et croisées.

3 Analyse des corrélations

Une mesure des corrélations moyennes entre deux signaux x_1, x_2 de durée T est fournie par l'intégrale normalisée C de leur recouvrement pour un décalage de durée courante τ :

$$C[x_1, x_2](\tau) = c_{1,2}(\tau) / [c_{1,1}(\tau)c_{2,2}(\tau)]^{1/2}$$

$$c_{i,j}(\tau) = \int_0^{T-\tau} \tilde{x}_i(t)\tilde{x}_j(t)dt \quad ; \quad \tilde{x}_i(t) = x_i(t) \quad ; \quad \tilde{x}_j(t) = x_j(t + \tau)$$

Par définition, C varie entre -1 et 1 . La valeur $|C| = 1$ (resp. $C = 0$) signale des signaux parfaitement cohérents (resp. incohérents). La durée de décroissance de $|C|$ vers 0 indique le temps de cohérence du ou des signaux.

La fonction d'auto-corrélation $C[a_c, a_c](\tau)$ de l'enveloppe centrée du signal, $a_c = a - \bar{a}$, s'annule sur un temps de cohérence τ_a de l'ordre de $\tau_a \approx 33s$ (Fig.1-d). Celui-ci est comparable à la longueur moyenne des bursts, $T_B \approx 35s$. Cela signifie que les contributions intégrées du recouvrement du signal d'enveloppe par lui-même cessent lorsque les bouffées ne se superposent plus à elles-mêmes. Ceci témoigne d'une absence de corrélation en temps et en durée des bouffées de branchements.

La fonction d'auto-corrélation $C[x_L, x_L](\tau)$ du signal complet $x(z_0, t) \equiv x_L(t)$ présente des oscillations à la durée de branchement T_S dont l'amplitude décroît pour s'annuler au delà d'un temps de cohérence $\tau_c \approx 7T_S$ (Fig.2-a). En comparaison du cas précédent, l'enveloppe $a(t)$ est ici multipliée par le signal de phase $s(t)$. Ce dernier est responsable des oscillations de la fonction $C[x_L, x_L](\tau)$ sur l'échelle de temps T_S . En revanche, il n'induit qu'une baisse minime du temps de cohérence : $\tau_c \approx 30s \approx \tau_a$. Ceci laisse présager que ce signal $s(t)$ présente une forte cohérence interne, au moins sur la durée des bouffées de branchement.

Avant d'étudier ce point plus précisément, il est utile de considérer la fonction de corrélation croisée entre deux signaux de branchements pris à deux endroits différents de l'interface. Par simplicité, nous considérons ici le signal $x_R(t)$ obtenu sur le flanc droit de la même dendrite, à même distance $z_0 = 80\mu m$ de sa pointe (Fig.1-a). La fonction de corrélation $C[x_L, x_R](\tau)$ montre alors des oscillations sur l'échelle de temps T_S mais une amplitude jamais supérieure à 0.1 (Fig.2-b). Cette faible valeur n'est pas due au recouvrement des enveloppes (positives) des deux signaux qui auraient induit une valeur médiane, mais à celui de leur signaux de phase $-1 < s_L(t) < 1$, $-1 < s_R(t) < 1$. Ces derniers se révèlent, pour tout décalage τ , non corrélés, conduisant ainsi à une fonction de corrélation croisée d'amplitude très faible : les branchements des deux flancs d'une même dendrite sont décorrélés. Cette conclusion s'étend sans surprise aux branchements de dendrites différentes.

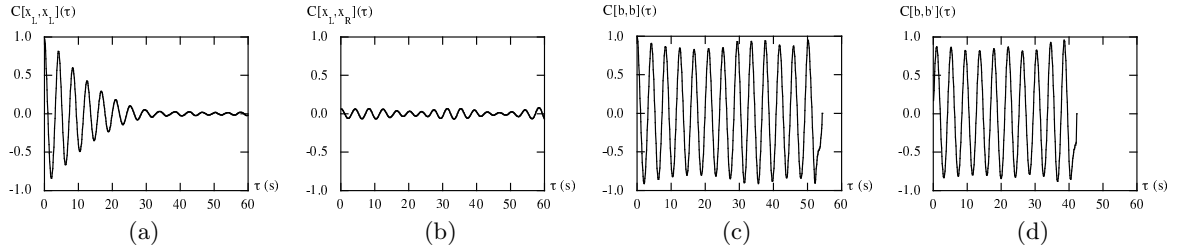


Fig.2. Corrélation des branchements sur un large ensemble de bouffées ou sur des bouffées isolées. (a) Fonction d'auto-corrélation du signal $x_L(t) = x(z_0, t)$ extrait de la figure 1-a sur une durée d'une heure. Son temps de cohérence n'est étonnamment pas réduit par rapport à celui de sa seule enveloppe (Fig. 1-d). Ceci signale une forte cohérence interne du signal de phase des branchements. (b) Corrélation croisée des signaux $x_L(t)$, $x_R(t)$ extraits des flancs gauches et droits de la même dendrite (dendrite de gauche de la figure 1-a). Sa faible amplitude témoigne d'une absence de cohérence entre ces signaux. (c) Fonction d'auto-corrélation $C[b, b](\tau)$ de la bouffée centrale $b(t)$ de la figure 1-b ($3367s < t < 3421s$). Une forte cohérence est maintenue sur toute la bouffée dendritique. (d) Fonction de corrélation croisée $C[b, b'](\tau)$ des bursts $b(t)$ et $b'(t)$ ($3444s < t < 3486s$) de la figure 1-b. Une forte cohérence entre ces deux émissions est maintenue sur l'ensemble de leur recouvrement.

L'analyse du signal de branchement a ainsi conduit à suspecter une forte cohérence interne de son signal de phase sur la durée des bouffées de branchement. Pour tester ce point essentiel, nous extrayions des bouffées du signal de branchement afin de déterminer leur propre fonctions d'auto-corrélation et de corrélation croisée. Nous obtenons alors les résultats génériques suivants que nous illustrons sur des bouffées $b(t)$, $b'(t)$ extraites du signal de la figure 1-b.

La fonction d'auto-corrélation $C[b, b](\tau)$ de la bouffée $b(t)$, $3367s < t < 3421s$, montre une amplitude d'oscillation remarquablement proche de l'unité sur l'ensemble de sa durée (Fig.2-c). Ce résultat, valide

pour toute bouffée quelque soit sa longueur ou sa position, témoigne de la forte cohérence interne du signal de branchement dans une même bouffée d'émission. Il contraste avec la perte de cohérence de l'enveloppe du signal complet au delà d'une durée moyenne de bouffée (Fig.1-d). Au total, cela conduit à une vision partagée de la cohérence du signal de branchement : des branchements très cohérents mais émis par bouffées aléatoirement distribuées.

La fonction de corrélation croisée $C[b, b'](\tau)$ des bouffées $b(t)$ et $b'(t)$, $3444s < t < 3486s$, présente également une amplitude proche de l'unité sur l'ensemble du recouvrement (Fig.2-d). Cela signifie que ces signaux cohérents délivrent, pour des décalages τ successifs, des interférences constructives, sans battement notable. Ce résultat conforte la propriété de cohérence interne des bouffées de branchements. Il indique par ailleurs que la fréquence ν de branchement est la même dans chaque bouffée à une variation relative $\delta\nu/\nu$ inférieure à $T_S/T_B \approx 10^{-1}$.

En l'absence de décalage, i.e. pour $\tau = 0$, la fonction $C[b, b'](\tau)$ présente par ailleurs une valeur inférieure à l'unité (Fig.2-d). Ceci signifie que les bouffées de branchement débutent avec des phases différentes et, de fait, aléatoires. On comprend alors que le recouvrement des bouffées dans la fonction d'auto-corrélation $C[x_L, x_L](\tau)$ du signal complet $x_L(t)$ conduise au total à des interférences destructives, limitant ainsi sa durée de cohérence à la taille moyenne des bouffées, T_B (Fig.2-a). Pour la même raison, on comprend également que la corrélation croisée de signaux différents donne des faibles valeurs, les origines de phase des bouffées étant décorréliées (Fig.2-b).

4 Discussion

Les branchements dendritiques présentent ainsi, par bouffée, une forte cohérence interne. La variabilité des bouffées en longueur et en origine de phase plaide pour une origine interne et naturelle. En particulier, la seule possibilité de forçage déterministe dans le dispositif expérimental mettrait en jeu le dispositif de translation par l'intermédiaire de sa vis ou des pas du moteur. Cependant, la première fait un tour en $300s$ et les seconds sont espacés de $0.05s$ environ. Ces temps sont ainsi trop éloignés des durées de branchements ($T_S \approx 4s$) ou de bouffées ($T_B \approx 35s$) pour en être à l'origine. En particulier, le temps de diffusion du champ thermique dans l'échantillon étant de $200s$, toute fluctuation de vitesse aux échelles T_S ou T_B transporterait l'interface en bloc, conduisant ainsi à des oscillations des pointes de dendrites contraires aux observations.

La nature des corrélations du signal dendritique présente des similitudes frappantes avec celles de la lumière naturelle : une succession aléatoire de trains d'onde cohérents, sans corrélation de leurs origines de phase. Comme ici, cela donne lieu à des interférences entre trains d'onde isolés (Fig.2-d), mais à aucune cohérence nette entre des paquets de ceux-ci (Fig.2-b).

Les précédentes études expérimentales sur les branchements dendritiques ont principalement concerné la croissance libre (i.e. à température homogène). Leurs conclusions étaient notablement disparates : les branchements ont été rapportés être non corrélés [6], partiellement corrélés [7] ou largement corrélés [8] ; la pointe de dendrite a été présentée avoir une vitesse constante [6,7] ou oscillante [8,9,10] ; son rayon de courbure a été décrit constant [6,7,10] ou oscillant [8]. Ici, la pointe de dendrite et son rayon de courbure sont constants, mais la cohérence apparente du signal dépend du poids respectif des bouffées et des branchements. Ceci pourrait expliquer la variabilité des conclusions expérimentales, les branchements cohérents étant rapportés sur des bouffées longues [8] et les branchements décorréliés sur des bouffées courtes [6,7].

La cohérence interne des branchements correspond à une auto-organisation à échelle mésoscopique qui révèle des caractéristiques non-linéaires sous-jacentes. En particulier, elle s'oppose à une modélisation des branchements par amplification linéaire des fluctuations naturelles [11] dont le produit ne peut être qu'aussi incohérent que le bruit originel. Ceci rejoint le désaccord entre la forme du taux de croissance alors prédit et la surface critique de branchements mesurée [12]. Cette cohérence s'oppose également aux modes globaux induits par une oscillation de pointe [13] qui reste indécélable ici. En revanche, elle pourrait résulter de couplages non-locaux, éventuellement diffusifs, entre branchements et pointes de dendrites. D'autres pistes pourraient mettre en jeu l'anisotropie, voire l'élasticité. Sans doute, les modèles de champ de phase devraient-ils permettre de tester avec efficacité les mécanismes proposés.

5 Conclusion

Nous avons mis en évidence une forte cohérence des branchements dendritiques à l'intérieur de bouffées d'émissions par ailleurs décorréelées. Ceci révèle une auto-organisation inattendue des interfaces de solidification : les dendrites possèdent un coeur, même si ses pulsations sont pathologiques. En revanche, chacun de ces phénomènes, la cohérence des branchements et l'existence de bouffées, reste pour l'heure inexpliqué. Leur compréhension représente cependant un enjeu de taille sur le plan fondamental comme sur le plan appliqué. Elle pourrait ainsi permettre d'identifier un mécanisme générique d'auto-organisation des formes de croissance branchées, éventuellement transposable à d'autres systèmes plus complexes que la solidification. Elle pourrait enfin conduire à des possibilités d'organisation spontanée des interfaces de croissance aux échelles mésoscopiques.

Références

1. W.W. MULLINS AND R.F. SEKERKA, Stability of a planar interface during solidification of a dilute binary alloy, *J. Appl. Phys.*, **35**, 444-451 (1964).
2. J.S. LANGER, Instabilities and pattern formation in crystal growth, *Rev.Mod.Phys.*, **52**, 1-28 (1980).
3. M. GEORGELIN, S. BODEA AND A. POCHEAU, Coherence of dendritic sidebranching in directional solidification, *Eur. Phys. Lett.*, **77**, 46001-46006 (2007).
4. M. GEORGELIN AND A. POCHEAU, Onset of sidebranching in directional solidification, *Phys. Rev. E*, **57**, 3189-3203 (1998) ; A. POCHEAU AND M. GEORGELIN, Shape of growth cells in directional solidification, *Phys. Rev. E*, **73**, 011604-18 (2006). A. POCHEAU AND M. GEORGELIN, Cell tip undercooling in directional solidification, *J. Cryst. Growth*, **206**, 215-229 (1999).
5. J.D. HUNT, K.A. JACKSON AND H. BROWN, Temperature Gradient Microscope Stage Suitable for Freezing Materials with Melting Points between -100 and +200°C, *Rev. Sci. Instrum.*, **37**, 805-805 (1966).
6. U. BISANG AND J.H. BILGRAM, Shape of the tip and the formation of sidebranches of xenon dendrites, *Phys. Rev. E*, **54**, 5309-5326 (1996).
7. A. DOUGHERTY, P.D. KAPLAN AND J.P. GOLLUB, Development of sidebranching in dendritic crystal growth, *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1652-1655 (1987).
8. H. HONJO, S. OHTA AND Y. SAWADA, New experimental findings in two-dimensional dendritic crystal-growth, *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 841-844 (1985) ; Y. SAWADA, B. PERRIN, P. TABELING AND P. BOUISSOU, Oscillatory growth of dendritic tips in a three-dimensional system, *Phys. Rev. A*, **43**, 5537-5540 (1991).
9. E. RAZ, S.G. LIPSON AND E. POLTURAK, Dendritic growth of ammonium-chloride crystals - Measurement of the concentration field and a proposed nucleation model for growth, *Phys. Rev. A*, **40**, 1088-1095 (1989).
10. V. FERREIRO, J.F. DOUGLAS, J. WARREN AND A. KARIM, Growth pulsations in symmetric dendritic crystallization in thin polymer blend films, *Phys. Rev. E*, **65**, 051606-16 (2002) ; J.C. LACOMBE, M.B. KOSS, J.E. FREI, C. GIUMMARRA, A.O. LUPULESCU AND M.E. GLICKSMAN, Evidence for tip velocity oscillations in dendritic solidification, *Phys. Rev. E*, **65**, 031604-6 (2002).
11. PELCÉ P. AND CLAVIN P, The stability of curved fronts, *Europhys.Lett.*, **3**, 907-913 (1987) ; R. PIETERS AND J.S. LANGER, Noise-driven sidebranching in the boundary-layer model of dendritic solidification, *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 1948-1951 (1986) ; M.N. BARBER, A. BARBIERI AND J.S. LANGER, Dynamics of dendritic sidebranching in the two-dimensional symmetrical model of solidification, *Phys. Rev. A*, **36**, 3340-3349 (1987).
12. A. POCHEAU AND M. GEORGELIN, Cellular arrays in binary alloys : from geometry to stability, *J. Cryst. Growth*, **250**, 100-106 (2003).
13. D.A. KESSLER, J. KOPLIK AND H. LEVINE, Geometrical models of interface evolution. II. Numerical simulation, *Phys. Rev. A*, **30**, 3161-3174 (1984).