Grandes déviations et chaoticité : étude à l'aide d'une dynamique biaisée

Julien Tailleur & Jorge Kurchan

Laboratoire PMMH, ESPCI, 10 rue Vauquelin, 75005 Paris Cedex 5
tailleur@pmmh.espci.fr

La physique des systèmes dynamiques non-linéaires s'explique souvent par l'existence de trajectoires rares, qui jouent paradoxalement un rôle prépondérant. Par exemple, la présence de résonnances détermine la stabilité des systèmes planétaires[1,2] et l'existence de solutions localisées permet un transport rapide d'énergie dans des systèmes aussi divers que les condensats de Bose-Einstein ou certaines biomolécules[3,4]. Or, malgré les nombreux progrès réalisés au cours des dix dernières années, les méthodes permettant de localiser de tels objets restent confinées aux systèmes à peu de degrés de liberté, et leur application dans les domaines de la physique statistique, la chimie ou même l'astronomie reste périlleuse. Nous présentons ici une méthode introduite récemment[5] qui permet de localiser des trajectoires ayant une chaoticité atypique[1] dans des systèmes a plusieurs degrés de liberté.

De manière générale, pour étudier les fluctuations d'une observable en physique statistique, on s'appuie sur l'utilisation de fonctions de grandes déviations – l'entropie et l'énergie libre en étant les exemples canoniques. S'inspirant de ces schémas de pensée, Ruelle a développé à la fin des années 70 un “formalisme thermodynamique”[6] en appliquant les outils de la mécanique statistique à l'espace des trajectoires d'un système dynamique. Il a ainsi pu transposer les notions d'énergie libre et d'entropie d'un cadre purement statique à une étude dynamique. Toutefois, le calcul de ces quantités dans le cadre de systèmes à plusieurs degrés de liberté est extrêmement difficile, et n'a été réalisé que dans très peu de cas. La dynamique biaisée que nous introduisons ici, si elle permet de localiser des grandes déviations de chaoticité, rend également possible le calcul d'une énergie libre dynamique[2]. L'hétérogénéité dynamique d'un système physique peut alors être étudiée à la lumière de son paysage d'énergie libre, permettant l'introduction d'une notion claire et précise de transition de phase dynamique. Nous illustrons cette idée sur l'exemple de la Standard Map.

Finalement, en guise d'exemple de “haute” dimensionnalité, nous appliquons notre méthode à la chaîne FPU d'oscillateurs non-linéaires, où elle détecte la présence de modes de respiration chaotiques[4] et de solitons, lorsque l'on cherche respectivement des solutions chaotiques ou intégrables.

Références

1. Laskar, J. A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System. *Nature* **338** 237-238 (1989)
2. Murray N, Holman M, The role of chaotic resonances in the Solar System *Nature***410** (6830) : 773-779 (2001)
3. A. Trombettoni and A. Smerzi, Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2353 - 2356 (2001).
4. Cretegny T, Dauxois T, Ruffo S, Torcini A. Localization and equipartition of energy in the beta-FPU chain : Chaotic breathers *Physica* **D 121** 109-126 (1998)
5. Tailleur J., Kurchan J. Probing rare physical trajectories with Lyapunov weighted dynamics. Sous presse. Accepté pour publication dans Nature Physics. cond-mat/0611672.
6. Ruelle D., *T*hermodynamic Formalism, 1978, Addison-Wesley, Reading (Mass.).

[1] ou, plus quantitativement, des exposants de Lyapunov atypiques
[2] Cette énergie libre étant définie en suivant Ruelle comme la fonction génératrice des cumulants de la distribution du plus grand exposant de Lyapunov