

Échelles de temps multiples dans les équations intégro-différentielles à retard en optoélectronique

L. Larger¹, M. Peil¹, M. Jacquot¹, Y. Chembo¹, & T. Erneux²

¹ UMR CNRS FEMTO-ST 6174 / Dépt. d'Optique P.M. Duffieux, Université de Besançon, 16 route de Gray, F-25030 Besançon, France

² Optique Non linéaire Théorique, Université Libre de Bruxelles Campus Plaine CP 231, B-1050 Bruxelles, Belgium

laurent.larger@univ-fcomte.fr

Résumé. Les oscillateurs chaotiques optoélectroniques développés pour les communications par chaos [1] haut débit présentent intrinsèquement au moins 3 échelles de temps caractéristiques, qui s'étalent sur plus de 6 ordres de grandeurs (de quelques 10 ps à quelques 10 μ s). Pour des valeurs modérées du gain de la boucle d'oscillation (avant d'atteindre les régimes chaotiques utilisés en communications par chaos), des régimes dynamiques complexes révélant chacune de ses échelles, ont été observés expérimentalement [2]; ceux-ci sont formés par une enveloppe presque périodique très lente, comprenant des oscillations quasi-rectangulaires rapides, suivi de régimes chaotiques entièrement développés et ultra-rapides.

La modélisation du montage expérimental fait appel à un processus différentiel linéaire correspondant à un filtre passe-bande, et soumis à une excitation non linéaire retardée de la variable dynamique [3]. Sur la base d'un tel modèle dynamique non linéaire à retard, prenant en compte un terme intégral inhabituel en plus du terme différentiel, des formes d'onde similaires peuvent être obtenues numériquement, si l'on prend soin de supprimer des transitoires extrêmement longs.

La communication proposée expose les résultats expérimentaux obtenus en termes de formes d'onde temporelle, de transformées en ondelettes, et de spectres de Fourier. Les résultats seront comparés aux solutions numériques, et dans le cas très simple des régimes périodiques, une interprétation analytique de la solution à échelle de temps multiple sera proposée.

Abstract. Optoelectronic chaotic oscillators for high bit rate chaos communications [1] do intrinsically possess at least 3 characteristic time scales, which span over more than 6 orders of magnitude (from few tens of ps to few tens of μ s). For moderate values of the loop gain (that is, before reaching the chaotic regimes used in chaos communications), complex dynamical regimes revealing each of these scales have been experimentally observed [2]; they are formed by a very slow quasi-periodic envelope, whose inner structure is a fast quasi-rectangular oscillation, followed by ultrafast and fully developed chaotic regimes.

The modeling of the experimental set-up involves a band-pass linear filter process, subjected to a delayed nonlinear excitation of the dynamical variable [3]. On the basis of such a nonlinear dynamical model taking into account an unusual integral term beside the typical differential one, similar waveforms can be obtained numerically, if the extremely long transients are properly skipped.

In this communication, we will report on the experimental results obtained in terms of time-domain waveforms, wavelet transforms, and Fourier spectra. These results will be compared to numerical solutions, and in the very simple case of periodic regimes, an analytical interpretation of the multiple timescale solution will be proposed.

1 Introduction

Les dynamiques de systèmes à délai sont actuellement activement étudiées dans différentes domaines scientifiques comme la mécanique, l'optique, l'économie ou les sciences de la vie. Par contre, elles ont souvent été soigneusement évitées dans bien d'autres domaines dans le passé, à cause de la difficulté inhérente à leur traitement mathématique. En effet, malgré leur expression formelle relativement simple, les équations à délai ont mathématiquement une dimension infinie. Cette particularité donne lieu à diverses phénoménologies, qui vont typiquement de la multistabilité à l'hyperchaos.

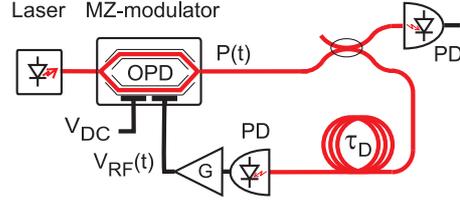


Fig.1. Représentation schématique du système expérimental.

Le paradigme des équations à délai est le modèle d'Ikeda, qui décrit la dynamique d'un faisceau laser dans une cavité en anneau non linéaire avec l'équation :

$$\tau \dot{x}(t) = -x(t) + f[x(t - \tau_D)], \quad (1)$$

où f est une fonction non linéaire, τ le temps de réponse du système (inversement proportionnel à sa fréquence de coupure), et enfin τ_D est le délai.

En étudiant un générateur de chaos pour les communications large bande, nous avons été amenés à développer une architecture particulière d'oscillateur électro-optique non linéaire à retard, qui a révélé expérimentalement une très grande richesse en terme de comportements dynamiques. Par contre, ce nouvel oscillateur est décrit par une équation légèrement différente, à savoir :

$$\frac{1}{\theta} \int_{t_0}^t x(\eta) d\eta + \tau \dot{x}(t) = - \left(1 + \frac{\tau}{\theta}\right) x(t) + f[x(t - \tau_D)], \quad (2)$$

où un nouveau terme intégral (par rapport aux équations à retard usuelles) traduit le filtrage des basses fréquences, avec une fréquence de coupure $1/2\pi\theta$. Le rapport entre le "nouveau" temps caractéristique θ associé au terme intégrale, et le temps caractéristique "usuel" τ , correspond au ratio entre les fréquences de coupure haute et basse du filtre passe-bande caractéristique de la boucle de rétro-action optoélectronique. L'expérience montre que les modèles différentiel (1) et intégral-différentiel (2) diffèrent de manière significative, en ce sens que de nombreuses solutions dynamiques nouvelles émergent dans le second cas.

L'objectif de la présente communication est de reporter les divers comportements dynamiques associés à l'introduction de ce terme intégral dans l'équation d'évolution. Nous mettons l'emphase sur le cas où les trois constantes de temps sont réparties à équidistance logarithmique, à savoir $\theta \sim 10^3 \tau_D \sim 10^6 \tau$. L'étude de ce type de dynamiques n'existe pratiquement pas dans la littérature, et notre but est de contribuer à leur meilleure compréhension, particulièrement du point de vue expérimental.

Cette communication est organisée comme suit. Dans la section 2, le système expérimental est décrit en détail, et sa modélisation est effectuée dans la section 3. Les divers comportements dynamiques observés sont reportés et discutés dans la section 4, et la dernière section conclut cette étude.

2 Le système expérimental

Le système expérimental étudié est représenté dans la Fig. 1. C'est un oscillateur électro-optique avec retard, dont le principe fondamental est la modulation non linéaire, par un signal radio-fréquence large bande, de la puissance optique de sortie d'un laser à semiconducteur en régime continu. Cette modulation est effectuée grâce à un modulateur électro-optique de Mach-Zehnder (MZ) intégré en LiNbO_3 , dont les tensions demi-onde en continu et en radio-fréquence sont telles que $V_{\pi,DC} = V_{\pi,RF} \equiv V_{\pi} = 4.0$ V. Le MZ est alimenté en continu par un laser DFB (Distributed FeedBack) à $1.55 \mu\text{m}$, dont on peut faire varier la puissance optique injectée P_0 de 0 à 10 mW. Il est important de noter qu'il n'y a ici aucune dynamique propre au laser lui-même, qui opère en régime continu. La sortie optique modulée du MZ est

envoyée dans une ligne à retard fibrée de quelques mètres, donnant un délai dont l'ordre de grandeur typique est de 40 ns. Le signal lumineux modulé en intensité est ensuite transformé en signal électrique radio-fréquence grâce à une photodiode (PD) de 12 GHz de bande passante, et un facteur de conversion $S = 1.9$ V/mW. La boucle fermée de l'oscillateur est telle que le signal électrique module finalement la puissance optique du laser grâce au MZ, après avoir été amplifié par un amplificateur très large bande ayant 18 dB de gain (amplification d'amplitude de $G = 8$).

La boucle de rétro-action est ainsi fermée, et la bande passante combinée de tous les composants optoélectronique et électro-optique est d'environ 30 kHz–12 GHz ; cette large bande de fréquence de la chaîne d'oscillation est principalement délimitée par la photodiode. Un tel filtrage large bande est précisément à l'origine des termes intégral et différentiel dans l'équation d'évolution du système, tel que modélisés par l'équation (2). Enfin, l'intensité lumineuse à la sortie du MZ peut être visualisée grâce à la sortie libre d'un coupleur 2×2 . C'est par cette sortie optique modulée en intensité que nous pouvons observer les différents comportements dynamiques du système, en fonction de deux paramètres physique principaux, la puissance optique P_0 (jouant sur le gain de l'oscillateur), et la la tension de bias V_{DC} du MZ (modifiant la forme locale de la non linéarité retardée).

3 Le modèle

Comme expliqué dans la section précédente, le filtrage est essentiellement responsable de la dynamique temporelle observée. Le signal lumineux à la sortie du MZ est retardé de $\tau_D = nL/c$, où n est l'indice du cœur de la fibre à la longueur d'onde du faisceau laser, L est la longueur de la fibre, et c la vitesse de la lumière dans le vide. La puissance optique à l'entrée de la photodiode peut donc s'écrire $p(t) = \alpha P_0 \cos^2[\pi v(t - \tau_D)/(2V_{\pi,RF}) + \pi V_{DC}/(2V_{\pi,DC})]$ où α est le facteur de perte de la boucle, et $v(t)$ est le signal électrique de modulation du MZ. Après la conversion optique / électrique, l'amplification et le filtrage, on arrive à l'équation suivante pour la dynamique de la tension radio-fréquence $v(t)$

$$\tau \dot{v}(t)/G + \left(1 + \frac{\tau}{\theta}\right) v(t)/G + \frac{1}{\theta} \int_{t_0}^t v(\eta)/G d\eta = \alpha S P_0 \cos^2 \left[\frac{\pi v(t - \tau_D)}{2V_{\pi,RF}} + \frac{\pi V_{DC}}{2V_{\pi,DC}} \right]. \quad (3)$$

Cette équation peut être ramenée à (2), en considérant la variable normalisée $x(t) = \pi v(t)/(2V_{\pi,RF})$, et la fonction non linéaire $f(x) = \beta \cos^2[x + \Phi]$ avec $\beta = \pi \alpha S G P_0 / (2V_{\pi,RF})$ et $\Phi = \pi V_{DC} / (2V_{\pi,DC})$. Le paramètre sans dimension β apparaît donc comme le "poids" du terme de rétro-action non linéaire retardé, et il peut être linéairement augmenté en faisant varier la puissance optique P_0 du laser. D'autre part, le paramètre Φ est le déphasage statique du MZ, et il peut aussi être librement changé à travers la tension statique V_{DC} .

On peut aussi remarquer que l'approximation $1 + \tau/\theta \simeq 1$ est valable, puisque $\tau/\theta \simeq 10^{-6}$. Cette approximation est excellente tant que le filtre est large bande, et non résonant.

4 La dynamique

Comme expliqué dans l'introduction, nous avons principalement utilisé trois techniques pour caractériser expérimentalement les divers comportements dynamiques de ce système, à savoir les diagrammes de bifurcation des fonctions de densité de probabilité, les séries temporelles, et enfin les transformées en ondelette. Le gain sera modifié grâce au courant de pompage du laser I_L , qui agit sur la puissance optique P_0 .

- Gain faible

Lorsque le feedback est très faible, typiquement pour $\beta < 1$, le système n'oscille pas car le gain de boucle est inférieur aux pertes. Le système reste alors sur le point d'équilibre trivial. Par contre, quand ce gain dépasse la valeur critique des pertes, il y a bifurcation vers des solutions non triviales. En particulier, comme on peut le voir sur la figure 2(gauche), il y a deux types distincts de solutions périodiques

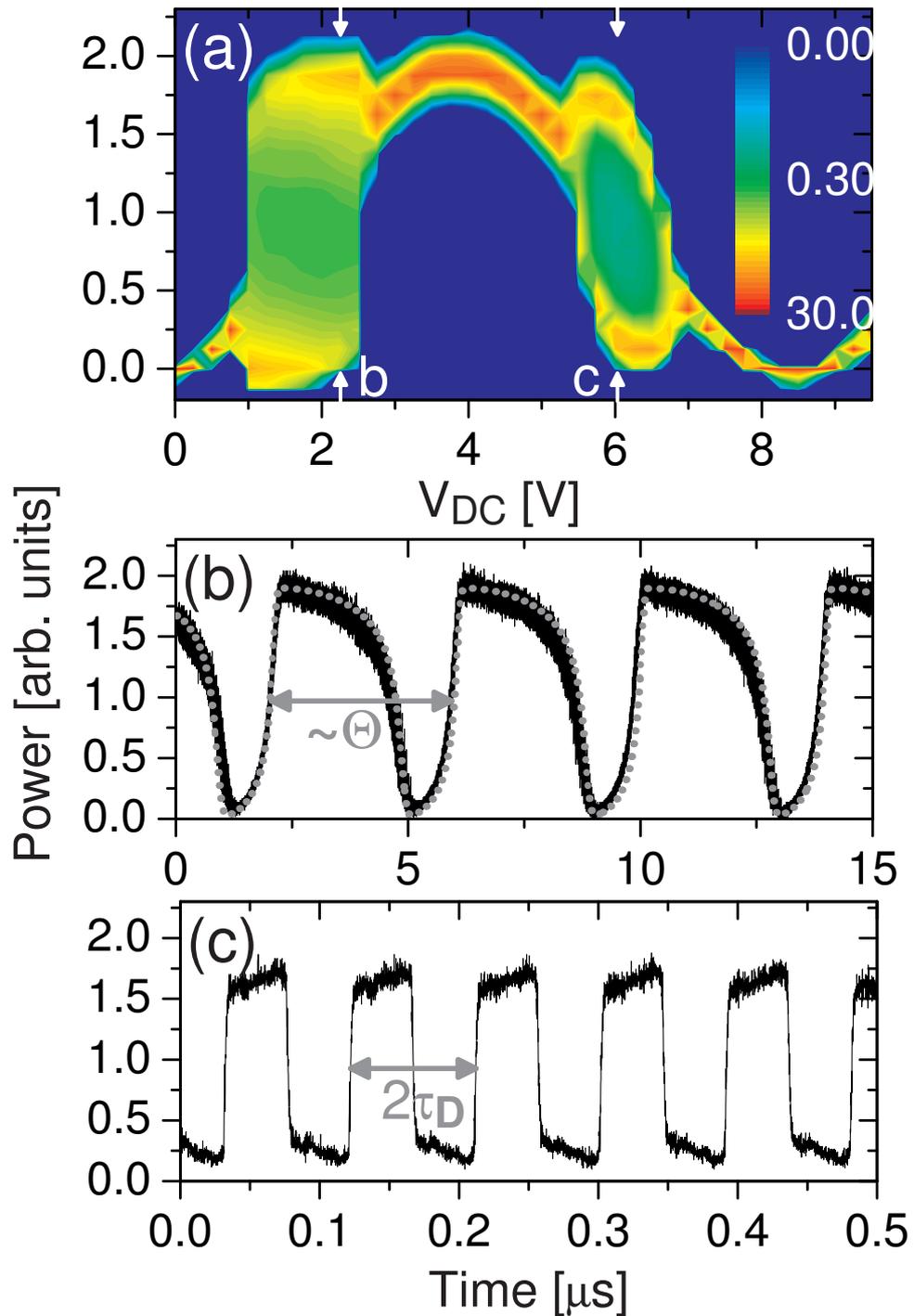


Fig. 2. Dynamique pour les gains faibles (figures de gauche) : (a) Fonction de densité de probabilité de l'intensité, pour $I_L = 30$ mA. Les traces temporelles sont présentées en (b) pour $V_{DC} = 2.25$ V, et en (c) pour $V_{DC} = 6.00$ V. La ligne discontinue grise montre le résultat numériquement obtenu en utilisant l'équation (2). Dynamique pour les gains modérés (figures de droite) : (a) Fonction de densité de probabilité de l'intensité, pour $I_L = 45$ mA. Les traces temporelles sont présentées en (b) pour $V_{DC} = 2.25$ V, en (c) pour $V_{DC} = 3.75$ V, en (d) pour $V_{DC} = 6.50$ V, et en (e) pour $V_{DC} = 7.50$ V.

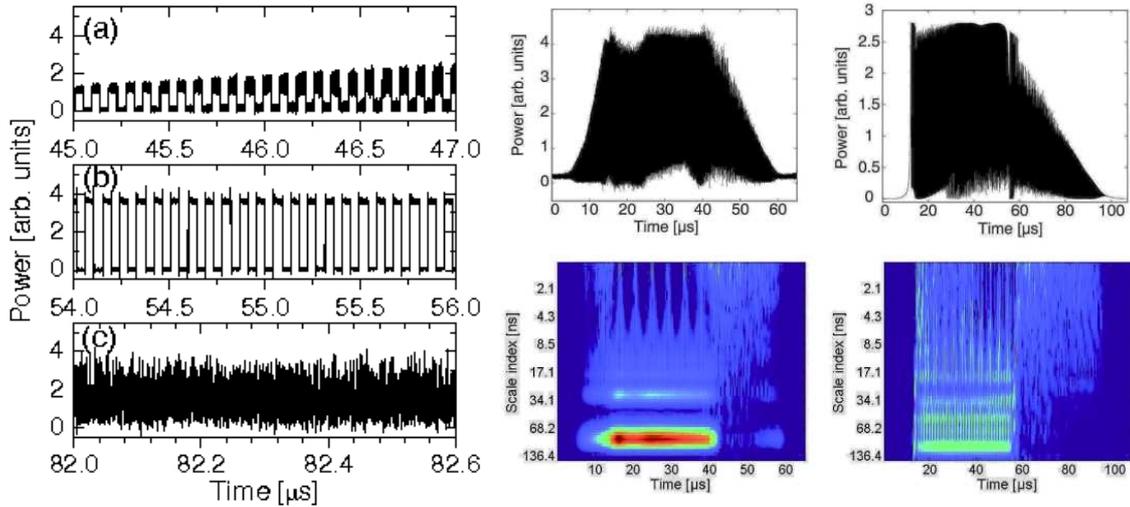


Fig.3. Figures de gauche : zoom du *breather* chaotique de la figure 2e (à droite). Figures de droite : trace temporelle (haut) et transformée en ondelettes (bas) : (a) pour la trace temporelle de la figure 2e (à droite), et (b) pour la trace temporelle obtenue avec le modèle de l'équation 2.

dans ce régime. À la figure 2(gauche)b, une période de l'ordre de θ est observée, tandis que cette période est égale à $2\tau_D$ à la figure 2(gauche)c. Ce dernier régime est en fait celui qui est observable dans les équation à retard usuelles (sans terme intégral), de type Ikeda, ou Mackey–Glass. Une différence notable avec notre système est que les plateaux sont légèrement inclinés, à cause de la fréquence de coupure basse qui filtre les composantes continues du signal (i.e. les plateaux constant de l'onde carrée). Par contre, le changement le plus net induit par le paramètre θ est clairement la solution périodique de la figure 2(gauche)b, qui cependant ne laisse pas *a priori* entrevoir une influence du délai τ_D .

- Gain modéré

En augmentant le gain, on arrive au régime correspondant à une contre réaction dite “modéré”. Ici, tel qu'on peut le voir dans la figure 2 (à droite), de nouvelles solutions apparaissent, totalement absentes du système “classique”, comme celui d'Ikeda. Ces nouvelles solutions sont hybrides, en ce sens qu'elles sont multi-échelles : d'un côté périodiques sur une échelle très lente, et de l'autre périodiques ou chaotiques sur une échelle beaucoup plus rapide, comme on peut l'observer sur la figure 3(à gauche). Les échelles de temps en question sont clairement séparées, puisque l'échelle lente est de l'ordre de θ , tandis que l'échelle rapide est de l'ordre de τ_D .

L'analyse en ondelettes de la figure 3 (à droite) donne une vision encore plus précise de cette dynamique multi-échelle, car elle distingue non seulement les différentes fréquences présentes dans le signal, mais aussi comment ces fréquences varient dans le temps (ce que le spectre de Fourier par exemple ne peut pas faire, à cause de l'hypothèse de stationnarité). C'est ainsi qu'au début des *breathers*, la dynamique rapide est périodique (de période $2\tau_D$), alors qu'à leur fin, ils ont une dynamique hyperchaotique, pour laquelle les fréquences très hautes s'étalent jusqu'à environ $1/\tau_D$.

- Gain fort

Enfin, lorsque le gain est poussé aux plus hautes valeurs expérimentalement accessibles, nous sommes dans le régime que nous qualifions de gain “fort”. Dans ce régime, on observe généralement l'état un hyperchaos totalement développé, tel qu'illustré sur la figure 4. Cet état est caractérisé par une trace temporelle presque indiscernable d'un bruit blanc (certes spectralement délimité par la bande passante de la boucle de rétro-action).

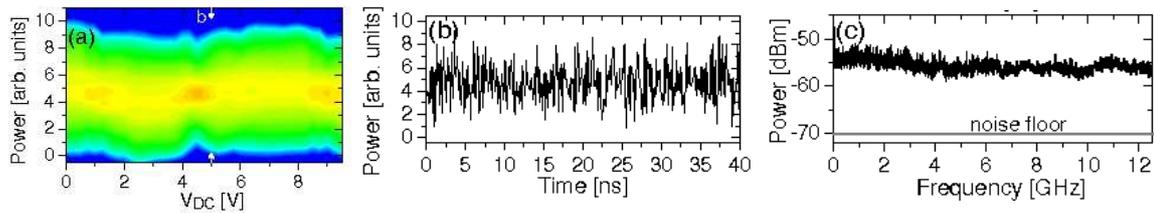


Fig.4. Dynamique pour les gains forts. (a) Fonction de densité de probabilité de l'intensité, pour $I_L = 70$ mA. (b) Traces temporelles pour $V_{DC} = 6.50$ V. (c) Spectre radio-fréquence correspondant.

Il faut aussi noter que dans ce régime, selon la valeur de β et de Φ , on peut aussi observer d'autres comportements dynamiques, comme par exemple des états dits "isomériques", dont peut résulter une amplitude de modulation périodique. D'autres comportements ont aussi été observés (dans le cas de plus grands retards, typiquement de l'ordre de la μs pour 200 m de fibre optique), tels que la dynamique "multi-pulses", probablement à rapprocher du phénomène d'excitabilité sur le plan qualitatif. Nous avons dans ce cas constaté certaines régularités, comme par exemple la périodicité des séquences de pulses, de même que la dépendance du nombre de ces pulses par séquence en fonction du gain.

5 Conclusion

En conclusion, cette étude nous a permis de mettre en évidence une large variété de dynamiques multi-échelles dans les systèmes intégrés-différentiels à retard.

La liste des phénomènes décrits est loin d'être exhaustive, si on considère l'étendue de la plage de variation des différents paramètres, qui couvre comme nous l'avons fait remarquer plus haut plus de 6 ordres de grandeur. Des efforts conjoints analytiques, numériques et expérimentaux devront encore être déployés pour poursuivre et compléter cette étude.

Enfin, l'importance de cette étude peut aussi être cruciale pour les systèmes dits PID (Proportional, Integral, Derivative), qui sont très souvent utilisés en ingénierie pour le contrôle ou l'asservissement des systèmes automatiques, et dans lesquels les effets de retard sont particulièrement critiques pour la stabilité de l'asservissement.

Références

1. A. ARGYRIS *et al*, Chaos-based communications at high bit rates using commercial fiber-optic links, *Nature*, **438**, 343-346 (2005).
2. Y.C. KOUOMOU *et al*, Hyperchaotic breathers in delayed optical systems, *Physical Review Letters*, **95**, 043903 (2005).
3. V.S. UDALTSOV *et al*, Chaotic bandpass communication system, *IEEE Trans. On Circuits And Systems*, **49** (7), 1006-1009 (2002)