

# Matériaux granulaires durs : Représenter un matériau non-linéaire comme un graphe avec une dynamique linéaire

Nicolas Rivier

IPCMS Gemme, Université Louis Pasteur, 3 rue de l'Université, 67084 Strasbourg, France  
nick@fresnel.u-strasbg.fr

Un matériau granulaire sec est décrit naturellement par un graphe. Deux grains en contact répulsif sont représentés par deux sommets reliés par une arête. Il n'y a pas de forces attractives entre grains et la cohésion de l'empilement est le fait de forces extérieures (la gravité et les bords du silo). Pour les matériaux granulaires secs durs - où la rigidité est beaucoup plus forte que la force appliquée, les forces entre grains, fortement non-linéaires, sont des contraintes géométriques. Elles sont booléennes - si elles s'appliquent, elles ont le même signe, répulsif, scalaires - dans la limite d'une friction tangentielle infinie entre grains, et donc représentées simplement par les arêtes du graphe. Les grains (lisses) roulant sans glisser les uns sur les autres (*s'il le peuvent*), constituent les excitations élémentaires. Le matériau granulaire coule alors comme un fluide (sec) ou comme un roulement à billes tri-dimensionnel. Sinon, il est bloqué ("jammed").

Les sommets du graphe représentent les grains, et les arêtes, les contacts booléens. Les circuits de grains en contact sont pairs ou impairs et le matériau est essentiellement discret (il n'a pas de limite continue sans défaut topologique, ni d'équation constitutive). Ses propriétés physiques sont données par les valeurs et vecteurs propres de la matrice d'adjacence (en fait, de la matrice dynamique, matrice d'adjacence avec la valence de chaque sommet sur la diagonale), donc par l'algèbre linéaire du graphe : Alors que la statique du matériau granulaire est non-linéaire, sa dynamique topologique et son comportement physique générique est donné par une algèbre linéaire, parce que nous avons remplacé les éléments matériels par des objets géométriques, avec une structure de graphe. Un matériau granulaire est donc un *métamatériau*, dont le comportement physique générique est donné par sa structure et non par la chimie ou la dureté de ses constituants. La structure de graphe a trois caractéristiques essentielles : discontinuité (granularité), circuits impairs ("arches") et désordre. Les deux états possibles de la matière granulaire désordonnée, fluide sec et solide bloqué fragile résultent directement de la dynamique topologique du graphe : Les éléments responsables du blocage sont les circuits impairs. Sans circuits impairs, le matériau granulaire coule comme un fluide sec ; la rotation d'un grain sur l'autre est une connexion qui est alors pure jauge. Le matériau granulaire de  $n$  grains est bloqué par  $c$  circuits impairs qui frustrent la rotation sans glisser. La plus petite valeur propre de la matrice dynamique,  $4c/n$  est le paramètre d'ordre du solide fragile.

La vorticité impaire (le coeur des circuits impairs) forme des boucles fermées ( $R$ -boucles) qui ont la taille  $L$  du matériau granulaire *désordonné* (alors que dans un empilement cristallin, leur taille est limitée par la période). Le paramètre d' "ordre"  $4c/n \sim 1/L$  est petit, étendu sur tout le matériau et la transition de blocage (*jaming*) entre fluide sec et solide fragile est du second ordre, avec lois d'échelle.

Il s'ensuit que le matériau désordonné a une densité élevée d' tats de basses énergies, indépendante de sa taille et de la dimension de l'espace, et donc une capacité calorifique et une entropie suffisantes pour absorber l'énergie libre lors du blocage. De plus, le désordre, en imposant de grandes  $R$ -boucles, fournit le mécanisme de plasticité des granulaires sous cisaillement : la  $R$ -boucle rétrécit en *montant*   travers les contacts des circuits impairs deconnect s l'un après l'autre.