

Analyse de dynamiques spatio-temporelles d'un laser

Dalila Amroun Aliane¹, Luc Pastur², Marc Brunel³, Hervé Leblond⁴, François Sanchez⁴ & Christophe Letellier³

¹ LEQ, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, BP 32, Bab Ezzouar, 16111 Alger

² LIMSI-CNRS, Université de Paris Sud, BP 133, Bât 508, 91403 Orsay cedex

³ CORIA-UMR 6614, Université de Rouen, BP 12, 76801 St-Etienne du Rouvray cedex

⁴ POMA, FRE 2988, Université d'Angers, 2 Bd Lavoisier, 49045 Angers cedex 01

amroun_dalila@yahoo.fr

Résumé. La dynamique spatio-temporelle d'un système laser avec diffraction est étudiée. La correspondance entre la structure du portrait de phase et l'organisation relative des défauts topologiques dans les diagrammes spatio-temporels est clairement mise en évidence. Ainsi, une dynamique de type chaos toroïdal est associée à des défauts apparaissant périodiquement (dans l'espace et dans le temps). En revanche, il n'y a plus de périodicité des défauts sur les diagrammes spatio-temporels lorsque le régime est un chaos développé.

Abstract. The spatio-temporal dynamics of a laser system with diffraction is investigated. The structure of the phase portrait and the relative organization of the topological defects in spatio-temporal diagrams are found to be strongly related. Thus, a toroidal-chaotic regime is associated with defects occurring periodically (in space and time). Contrary to this, defects are no longer periodically organized when the asymptotic regime corresponds to a developed chaos.

1 Introduction

Les dynamiques spatio-temporelles sont souvent étudiées en termes de diagrammes spatio-temporels et d'analyses perturbatives réductives. Toutefois, il est rarement fait référence aux techniques d'analyse de la théorie des systèmes dynamiques développées dans le contexte des évolutions purement temporelles. En hydrodynamique par exemple, l'approche spatio-temporelle est souvent utilisée pour détecter les instabilités et tenter d'interpréter le mécanisme de la turbulence. Ainsi, des équations d'amplitude sont d'abord extraites et des équations universelles (Ginzburg-Landau, Swift-Hohenberg, Kuramoto-Sivashinski...) sont ensuite obtenues afin de décrire des instabilités primaires et secondaires [1], et d'étudier les structures cohérentes [2]. Les lasers sont des systèmes dynamiques connus pour produire une grande variété d'instabilités spatio-temporelles et de chaos. Depuis les travaux de Haken qui établit l'analogie entre les instabilités laser et hydrodynamiques [3], l'étude des dynamiques laser spatio-temporelles (structures cohérentes [4], instabilité d'Eckhaus [5]...) est devenue un domaine de recherche riche et vaste.

Lors d'une précédente étude sur les dynamiques spatio-temporelles dans un tube à décharge, il a été montré que l'apparition d'une nouvelle fréquence dans les diagrammes spatio-temporels est associée à une bifurcation globale sur le tore [6] suivant un scénario mis en évidence par Baptista et Caldas [7]. Plus récemment, l'utilisation d'une dynamique symbolique a permis de mettre en évidence l'intermittence de modes fréquentiels dans une expérience d'écoulement en cavité ouverte [8], c'est-à-dire un système hydrodynamique spatio-temporel.

Dans cette contribution, nous montrons que les changements dans les diagrammes spatio-temporels peuvent être reliés à des modifications bien identifiées de la structure du portrait de phase reconstruit à partir de variables locales. Par conséquent, une certaine compréhension pourrait être obtenue à partir d'une analyse purement temporelle [9,10,11].

2 Modèle

Le système dynamique étudié est un laser monomode à élargissement homogène. Il est décrit par les équations de Maxwell-Bloch normalisées, avec diffraction dans la direction transverse x [12,9,13] :

$$\begin{cases} \partial_t e = -\sigma(e - p) + iA\partial_x^2 e \\ \partial_t p = -(1 - i\delta)p + ed \\ \partial_t d = -\gamma(d - r + \frac{1}{2}(ep^* + e^*p)) \end{cases} \quad (1)$$

Les quantités e , p et d sont respectivement obtenues après normalisation du champ électrique E , de la polarisation macroscopique P et de l'inversion de population D . Les paramètres $\gamma = \gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}$ et $\sigma = \gamma_{\ell}/2\gamma_{\perp}$ se définissent à partir du taux de relaxation de la polarisation γ_{\perp} , de l'inversion de population γ_{\parallel} et de l'intensité optique γ_{ℓ} . Le temps est normalisé par rapport à la durée de vie de la cohérence. Le paramètre $\delta = (\omega - \omega_a)/\gamma_{\perp}$ représente le désaccord de fréquence entre celle du champ ω et celle de la transition atomique résonante ω_a . A est le paramètre de diffraction. Le paramètre r représente le taux de pompage. L'opérateur différentiel partiel $\partial/\partial t$ est noté par ∂_t , et ainsi de suite.

3 Résultats numériques et discussions

L'objectif de ce travail est l'étude de l'influence du paramètre de diffraction A , responsable de la dépendance spatiale du système, sur la dynamique d'un laser monomode, et la mise en évidence du lien entre la structure spatio-temporelle et la dynamique purement temporelle de ce laser. Pour cela, nous avons effectué plusieurs simulations numériques de l'intensité laser dans le temps et l'espace pour différentes valeurs du paramètre A . Les séries temporelles correspondent à l'intensité laser « mesurée » au point de coordonnée $x = 0$.

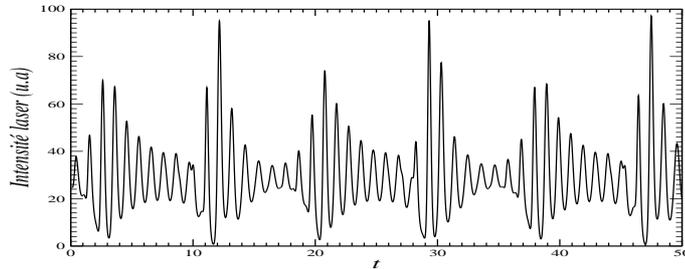


Fig. 1. Evolution temporelle de l'intensité laser « mesurée » au point de coordonnée $x = 0$ pour $A = 0.1$. Autres paramètres : $\sigma = 2$, $\gamma = 0.25$, $r = 30$ et $\delta = -2$.

Pour $A = 0.1$, l'intensité laser présente une évolution temporelle aperiodique (Fig. 1), ce qui se retrouve sur le portrait de phase reconstruit à partir de l'intensité laser en utilisant un plongement différentiel (coordonnées dérivées) [14]. L'attracteur révèle une structure toroïdale sur laquelle se développe les trajectoires (Fig. 2a). Une section de Poincaré sur l'attracteur, définie dans le plan $(X = I, Z = \ddot{I})$ par $Y = \dot{I} = 0$ et $Y < 0$, a été calculée (Fig. 2b). L'application de premier retour à cette section confirme que le comportement est structuré sur un tore pourvu d'une certaine épaisseur qui pourrait résulter d'un effet de projection de l'espace de haute dimension : c'est une dynamique de chaos toroïdal faiblement développé. L'aspect faiblement développé pourrait s'expliquer par les frontières de l'attracteur très nettement délimitées : ceci pourrait résulter de la contrainte du tore par une structure instable — qui reste à identifier — comme cela est fréquemment le cas dans les bifurcations sur le tore [15].

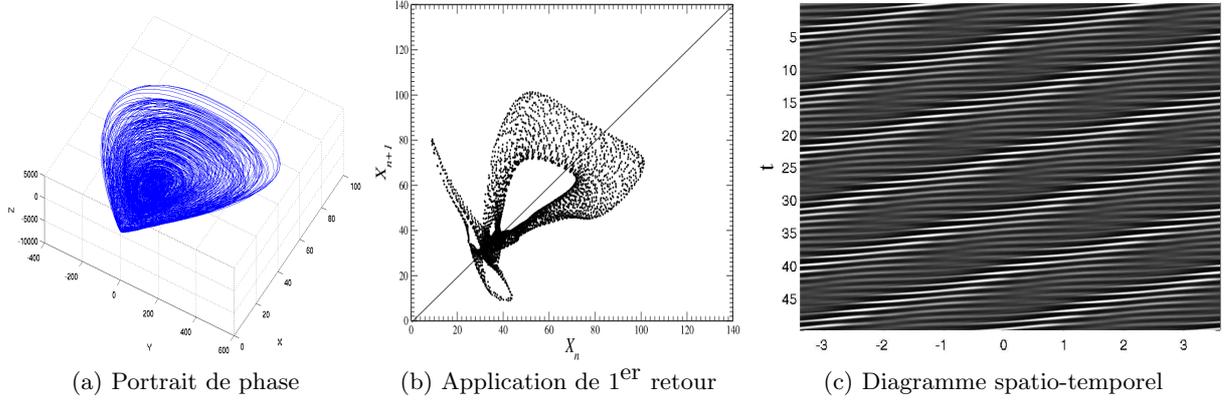


Fig. 2. Dynamique du laser spatio-temporel dans le plongement différentiel reconstruit à partir de l'intensité laser pour $A = 0.1$. Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 1.

Le diagramme spatio-temporel correspondant à cette dynamique (Fig. 2c) révèle des modulations de phase et d'amplitude importantes. Des glissements de phase de $\pm 2\pi$, accompagnés d'une mise à zéro de l'amplitude, se produisent cycliquement au cours du temps. Le processus se reproduit à intervalles de temps et d'espace réguliers, de sorte que le régime de création/annihilation de défauts topologiques [16] est périodique (à la précision de la localisation des défauts près). Par ailleurs, le spectre de Fourier spatial (Fig. 3) révèle la complexité dynamique : plusieurs vecteurs d'onde co-existent, chacun représentant une amplitude de Fourier avec une évolution temporelle chaotique.

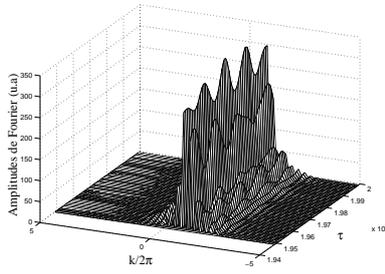


Fig. 3. Evolution temporelle des composantes spatiales de Fourier (vecteurs d'onde) pour $A = 0.1$.

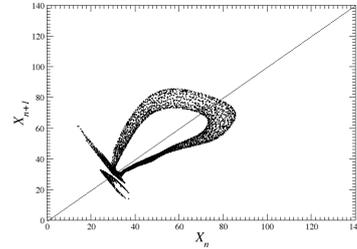


Fig. 4. Application de premier retour à une section de Poincaré pour $A = 0.1020$.

Lorsqu'on augmente le paramètre de diffraction A à $0,1020$, les défauts observés dans le diagramme spatio-temporel (Fig. 2c) ont tendance à disparaître car chaque création est immédiatement suivie d'une annihilation. Ceci se retrouve sur l'application de premier retour (Fig. 4) qui est moins développée que celle pour $A = 0,1$ (Fig. 2b) et dont l'épaisseur de la structure a diminué, ce qui est la signature d'un comportement chaotique atténué, tendant vers un comportement quasi-périodique du type de celui habituellement rencontré lorsque deux fréquences pilotent la dynamique. En d'autres termes, la dynamique se rapproche de celle d'un tore T^2 qui peut être plongé — en théorie — dans \mathbb{R}^3 .

Si A est encore augmenté à $0,1090$, la dynamique se modifie comme le révèle l'évolution temporelle de l'intensité laser (Fig. 5). L'épaisseur de l'application de premier retour est réduite de façon à ne laisser qu'une structure uni-dimensionnelle (Fig. 6b). Si cette structure avait été une boucle fermée, nous aurions pu conclure avec certitude à un comportement quasi-périodique. La structure ouverte inhabituelle peut résulter d'un effet de projection puisque le portrait de phase (Fig. 6a) révèle un tore assez complexe avec réinjection de la trajectoire au centre du tore. Une telle configuration ne peut apparaître que dans

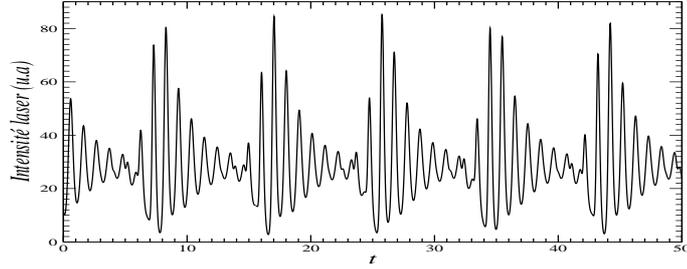


Fig. 5. Evolution temporelle de l'intensité laser « mesurée » au point de coordonnée $x = 0$ pour $A = 0,109$. Autres paramètres : $\sigma = 2$, $\gamma = 0.25$, $r = 30$ et $\delta = -2$.

un espace de dimension au moins égale à 4 : la topologie est donc non triviale et définir correctement une section de Poincaré pour un tel objet reste un problème ouvert. La zone centrale non visitée par la trajectoire, apparaissant autour de l'un des points singuliers du système, a guidé notre choix pour la construction de la section de Poincaré. Par ailleurs, les trajectoires changent leur direction d'excursion autour de cette zone, ce qui se répercute sur la section de Poincaré qui ne présente pas d'intersection dans cette région de l'espace des phases, d'où l'ouverture de la boucle. Si nous suivons notre hypothèse de travail selon laquelle les approches temporelle (portrait de phase) et spatio-temporelle doivent fournir des informations cohérentes entre elles, la quasi-périodicité de la dynamique est confirmée par le diagramme spatio-temporel qui est régulier, et sur lequel aucun défaut n'est identifié (Fig. 6c).

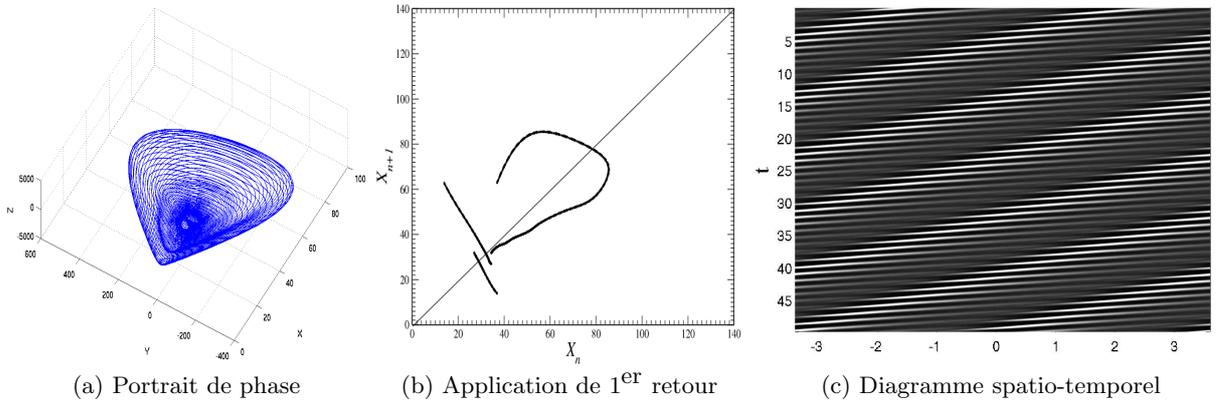


Fig. 6. Dynamique du laser spatio-temporel dans le plongement différentiel reconstruit à partir de l'intensité laser pour $A = 0.109$. Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 1.

Portant le paramètre A à une valeur légèrement plus élevée ($A = 0.10951$), l'évolution temporelle de l'intensité laser (Fig. 7) apparaît plus « agitée » que pour les valeurs précédentes. En fait, le tore explose et la nature chaotique du comportement (Fig. 8b), est caractéristique de ce qui arrive après l'explosion d'un tore : une dispersion des points autour de la structure originale du tore qui est comme base du comportement chaotique. L'anomalie — la boucle non fermée — due à la projection de la dynamique persiste : d'une certaine manière, c'est la confirmation que cette anomalie n'est pas de nature dynamique. Le diagramme spatio-temporel correspondant à cette dynamique (Fig. 8c) révèle à nouveau un régime de création/annihilation de défauts topologiques. Le processus, néanmoins, n'est pas ici strictement périodique, puisque certains défauts sont créés avec une légère avance ou un léger retard par rapport à l'intervalle spatio-temporel moyen, sans ordre apparent. Ceci confirme donc le lien étroit entre l'augmentation de la complexité du régime dynamique et l'apparition des défauts sur les diagrammes $x - t$.

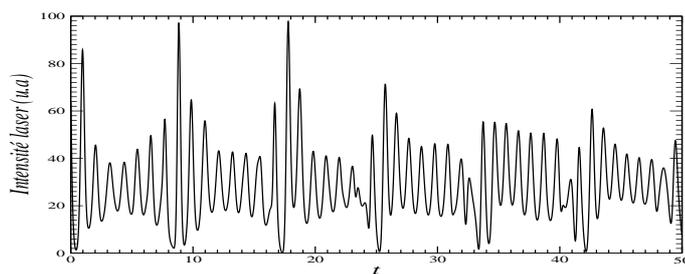


Fig. 7. Evolution temporelle de l'intensité du laser « mesurée » au point de coordonnée $x = 0$ pour $A = 0,10951$. Autres paramètres : $\sigma = 2$, $\gamma = 0.25$, $r = 30$ et $\delta = -2$.

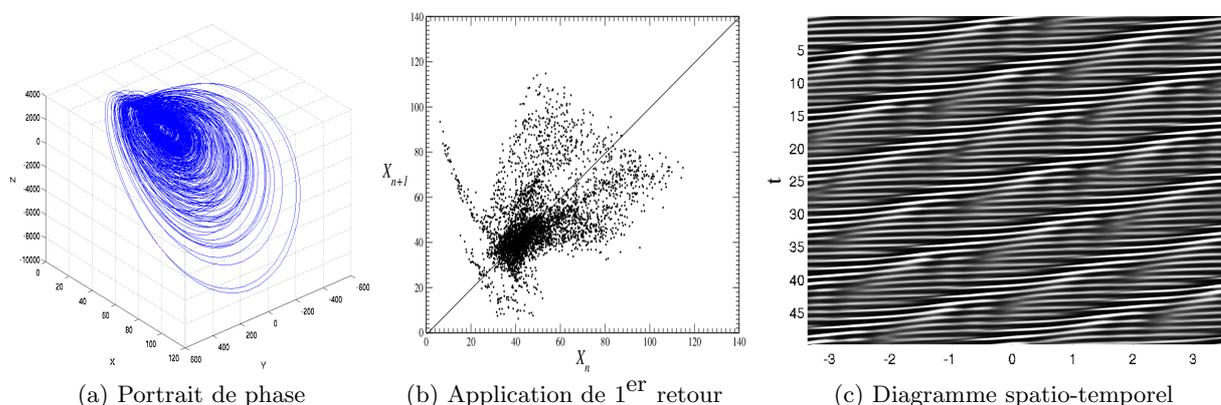


Fig. 8. Dynamique du laser spatio-temporel dans le plongement différentiel reconstruit à partir de l'intensité laser pour $A = 0.10951$. Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 1.

L'évolution de la dynamique ici décrite se résumerait donc à une transition d'une dynamique de plus en plus contrainte par une structure instable, qui finit par entrer en collision avec le tore. Ainsi, le chaos, d'abord faiblement développé, s'atténue de plus en plus jusqu'à ce que l'épaisseur du tore soit complètement réduite (Fig. 6b) pour ne laisser place qu'à un tore de type T^2 plongé dans un espace de dimension 4. Par la suite, la collision avec l'objet instable entraîne l'explosion du tore (Fig. 8b), ce qui laisse place à un comportement chaotique relativement développé. Ce scénario présente une signature évidente, tant selon l'approche purement temporelle (portraits de phase) que selon l'approche spatio-temporelle. Notons par ailleurs qu'un tel scénario — le pendant haute-dimension de ce qui est habituellement observé sur les systèmes de Duffing et Van der Pol [15] — a également été observé sur une chaîne annulaire d'oscillateurs de Rössler.

Nous avons voulu comprendre l'effet de l'extension spatiale du système sur le scénario de transition identifié pour $L = 7$, où $L = 2 x_m$ représente la taille de l'extension spatiale (x varie de $-x_m$ à $+x_m$ et $x_m = 3,5$). Pour cela, nous avons considéré un système dix fois plus étendu, à savoir $L = 70$. Pour $A = 0.109$, correspondant à un régime quasi-périodique à $L = 7$, le régime à $L = 70$ s'apparente plutôt à celui du tore explosé. En fait, une rampe de valeurs croissantes de A n'a pas permis de reproduire le scénario de transition mis en évidence pour $L = 7$. Notamment, le régime quasi-périodique n'a pas été retrouvé. Cela pose la question de l'effet des conditions aux limites, périodiques ici, sur la sélection des nombres d'onde permis et de son lien avec les propriétés de synchronisation entre les oscillateurs élémentaires du système. Le relâchement de cette contrainte, lorsque la taille du système augmente, semble être à l'origine d'une complexité croissante dans la dynamique temporelle locale.

4 Conclusion

Nous avons étudié la dynamique spatio-temporelle d'un laser monomode avec diffraction en combinant les portraits de phase et les diagrammes spatio-temporels. Nous avons mis en évidence le lien étroit entre la structure de ces portraits de phase et la dynamique des défauts topologiques dans les diagrammes spatio-temporels. La complexité des évolutions purement temporelles est associée à celle de la dynamique des défauts apparaissant dans l'espace et dans le temps. Ainsi, un régime quasi-périodique sur un tore T^2 est associé à des diagrammes spatio-temporels sans défaut, alors qu'une dynamique chaotique toroïdale (faiblement développée) correspond à des défauts apparaissant périodiquement dans l'espace et dans le temps. Un comportement chaotique bien développé correspond à des défauts se développant de manière irrégulière dans les diagrammes $x - t$. Les changements dans les diagrammes spatio-temporels sont donc étroitement liés à des bifurcations sur les portraits de phase reconstruits à partir de séries temporelles locales d'intensité laser. Dans le cas présent, le scénario correspond à une version « haute dimension » du scénario habituellement rencontré sur les systèmes de basse dimension tels que les systèmes de Duffing et Van der Pol.

Références

1. M. C. CROSS & P. C. HOHENBERG, Pattern formation outside of equilibrium, *Review of Modern Physics*, **65**, 851-1112 (1993).
2. L. PASTUR, M-T. WESTRA & W. VAN DE WATER, Sources and sinks in 1D travelling waves, *Physica D*, **174**, 71-83 (2003).
3. H. HAKEN, Analogy between higher instabilities in fluids and lasers, *Physics Letters A*, **53** (1), 77-78 (1975).
4. H. LEBLOND, M. BRUNEL, D. AMROUN & F. SANCHEZ, Sources and sinks of travelling waves in a single-mode laser, *Journal of Optics A*, **7**, 1-7 (2005).
5. J. PLUMECOQ, C. SZWAJ, D. DEROZIER, M. LEFRANC & S. BIELAWSKI, Eckhaus instability induced by nonuniformities in a laser, *Physics Review A*, **64**, 061801(R) (2001).
6. C. LETELLIER, A. DINKLAGE, H. EL-NAGGAR, C. WILKE & G. BONHOMME, Experimental evidence for a torus breakdown through a global bifurcation in a glow discharge plasma, *Physics Review E*, **63**, 042702 (2001).
7. M. N. BAPTISTA & I. L. CALDAS, Dynamics of the two frequency torus breakdown in the driven double scroll circuit, *Physics Review E*, **58**, 4413-4420 (1998).
8. F. LUSSEYRAN, L. PASTUR & C. LETELLIER, Dynamical analysis of an intermittency in an open cavity flow, *Physics of Fluids*, **20**, 114101 (2008)
9. D. AMROUN, *Dynamiques spatio-temporelles d'un laser monomode. Influence des effets spatiaux et des interactions dipôle-dipôle*, Thèse de Doctorat, Université de Rouen (juillet 2004).
10. D. AMROUN, C. LETELLIER, L. PASTUR, M. BRUNEL, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, Spatio-temporal dynamics versus temporal analysis : What can we learn ?, *First International Seminar on Fluid Dynamics and Materials Processing FDMP'2007*, Alger, 2-4 juin (2007).
11. D. AMROUN ALIANE, L. PASTUR, C. LETELLIER, M. BRUNEL, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, A link between spatio-temporal and temporal dynamics of a laser, *Dynamics Days Europe 2008*, Delft, 25-29 août (2008).
12. P. K. JAKOBSEN, J. V. MOLONEY, A. C. NEWELL & R. INDIK, Space-time dynamics of wide-gain-section lasers, *Physics Review A*, **45**, 8129-8137 (1992).
13. D. AMROUN, M. BRUNEL, C. LETELLIER, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, Complex intermittent dynamics in large-aspect-ratio homogeneously broadened single-mode lasers, *Physica D*, **203**, 185-197 (2005).
14. N. H. PACKARD, J. P. CRUTCHFIELD, J. D. FARMER & R. S. SHAW, Geometry from a time series, *Physical Review Letters*, **45**, 712-715 (1980).
15. C. LETELLIER, V. MESSEGER & R. GILMORE, From quasi-periodicity to toroïdal chaos : analogy between the Curry-Yorke map and the van der Pol system, *Physical Review E*, **77** (4), 046203, 2008.
16. P. COULLET, C. ELPHICK, L. GILL & J. LEGA, Topological defects of wave patterns, *Physical Review Letters*, **59**, 884-887 (1987).