

Dépendance de la nature du forçage sur la statistique de la puissance injectée dans une plaque mise en vibration chaotique

Olivier Cadot¹, Arezki Boudaoud², & Cyril Touzé¹

¹ ENSTA-UME, Unité de Recherche en Mécanique, Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau, Cedex, France

² Laboratoire de Physique Statistique, UMR 8550 du CNRS/ENS/Paris 6/Paris 7, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 5, France

olivier.cadot@ensta.fr

Résumé. Une plaque mise en vibration à grande amplitude atteint un état chaotique de turbulence d'onde où l'interaction non-linéaire entre ondes de flexion de la plaque conduit au transfert d'énergie de grande à petite longueur d'onde. Notre travail porte sur l'injection d'énergie dans ce système à l'aide d'un forçage périodique, aléatoire ou d'un forçage interpolant entre ces deux cas extrêmes. D'une part, nous avons étudié les corrélations entre force appliquée et réponse en vitesse au point de forçage. Les modèles proposés pour les statistiques de ces grandeurs sont en bon accord avec les expériences dans les cas du forçage aléatoire et périodique. Les distributions de puissance injectée présentent toujours une divergence logarithmique à petite puissance ; par contre, les queues de ces distributions sont gaussiennes pour le forçage périodique et exponentielles pour le forçage aléatoire. D'autre part, nous avons également étudié les distributions d'énergie injectée dans le cadre correspondant au théorème de fluctuation (ou théorème de Gallavotti-Cohen). Il apparaît que les conclusions du théorème sont vérifiées uniquement avec le forçage déterministe (périodique) et se dégradent au fur et à mesure que le forçage devient aléatoire.

Abstract. A vibrating plate is set into a chaotic state of wave turbulence by a periodic or a random local forcing, or by a forcing interpolating between these two limiting cases. Correlations between the forcing and the local velocity response of the plate at the forcing point are studied. Statistical models with fairly good agreement with the experiments are proposed for each forcing. Both distributions of injected power have a logarithmic cusp for zero power, while the tails are Gaussian for the periodic driving and exponential for the random one. The distributions of injected work over long time intervals are investigated within the framework of the fluctuation theorem, also known as the Gallavotti-Cohen theorem. It appears that the conclusions of the theorem are verified only for the periodic, deterministic forcing.

1 Introduction

La distribution statistique de l'énergie et des flux d'énergie est un problème fondamental pour les systèmes hors d'équilibre à grand nombre de degrés de liberté. Du point de vue théorique, le théorème de fluctuation (FT), aussi connu sous le nom de théorème de Gallavotti-Cohen, apporte un résultat exact caractérisant les systèmes physiques loin de leur état d'équilibre [1,2,3]. Dans sa version stationnaire, le théorème se formule de la façon suivante ; soit $p(t)$ la puissance injectée instantanée, $\langle p \rangle$ sa moyenne temporelle et ϵ_τ sa moyenne (adimensionnée) sur un intervalle de temps τ ,

$$\epsilon_\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{p(t')}{\langle p \rangle} dt'. \quad (1)$$

Le théorème établit l'équivalence suivante pour la fonction d'asymétrie

$$\rho(\epsilon_\tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\pi(+\epsilon_\tau)}{\pi(-\epsilon_\tau)} \sim \delta \epsilon_\tau \quad \text{quand } \tau \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

où $\pi(\epsilon_\tau)$ est la fonction de densité de probabilité de ϵ_τ . Dans la version chaotique [1,2], δ est le taux de contraction de l'espace des phases. Dans la version stochastique [3], $\langle p \rangle / \delta$ représente la température du bain thermostaté avec lequel le système est en contact.

Nous proposons d'étudier le rôle de la nature du forçage sur la validité du théorème. Pour aborder cette question, nous nous intéressons aux vibrations d'une plaque de grande dimension par rapport à son épaisseur et excitée localement par une force de grande amplitude. Dans ce cas, la plaque atteint un régime de turbulence d'ondes [4,5,6] où se propagent aléatoirement des ondes élastiques avec un spectre large bande [8,9]. Nous avons récemment montré que les conclusions du théorème de fluctuation sont vérifiées dans le cas d'un forçage périodique de la plaque, mais pas pour un forçage aléatoire [7]. Dans cet article nous reprenons cette expérience en explorant les cas intermédiaires entre ces deux cas extrêmes de forçages.

2 Expérience

2.1 Montage

Le montage expérimental est schématisé en Figure 1(a), il est identique à celui utilisé dans [7]. Il s'agit d'une plaque de réverbération choisie pour sa haute densité modale, obtenue grâce à ses dimensions ($2\text{ m} \times 1\text{ m}$) grandes devant l'épaisseur $h = 0.5\text{ mm}$. Les caractéristiques mécaniques sont les suivantes : un module d'Young de $E = 200\text{ GPa}$, un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et une masse volumique $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$. Le forçage est assuré par une bobine et un aimant permanent. Dans cette configuration la force agissant sur l'aimant est proportionnelle au courant circulant dans la bobine $F(t) = KI(t)$. Le courant est mesuré en insérant une résistance de 0.12Ω en série avec la bobine. La vitesse normale v au point d'application du forçage est mesurée à l'aide d'un vibromètre laser (Polytec, modèle OFV 056), voir Figure 1(a). La vitesse normale et le courant sont échantillonnés à 5000Hz . Dans la suite, la force et la vitesse sont montrées en unités arbitraires. (Figure 1(b)).

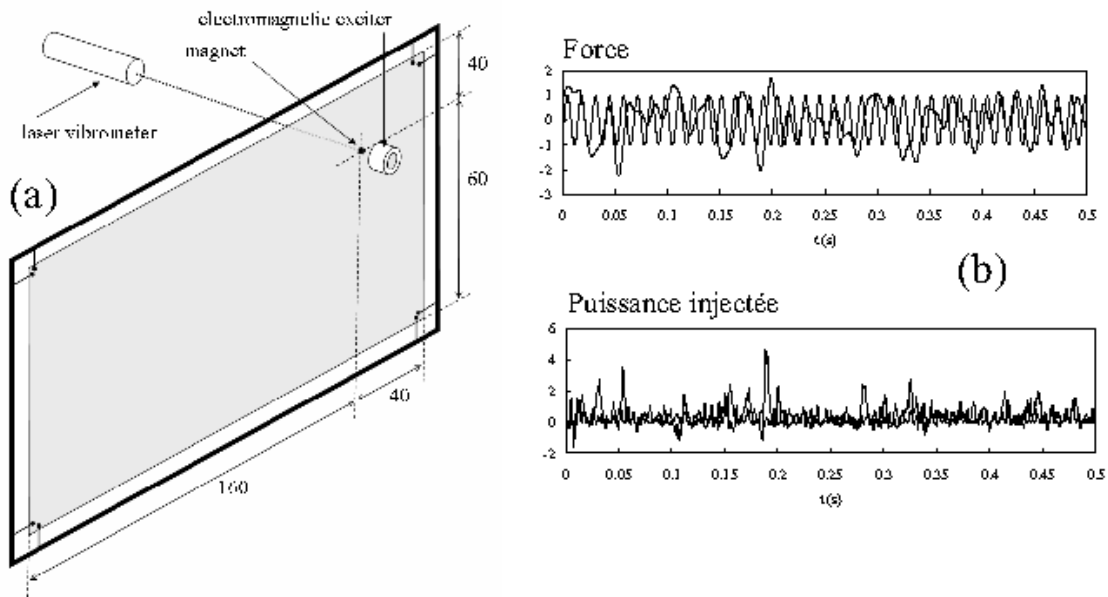


Fig. 1. (a) : Montage expérimental de la plaque suspendue par un cadre. Les dimensions sont en centimètre. L'excitateur électromagnétique (une bobine) est placé en face de l'aimant. La force agissant sur l'aimant est contrôlée par le courant circulant dans la bobine. Un vibromètre laser mesure la vitesse normale de l'autre côté de la plaque, au même emplacement que l'aimant. (b) : Séries temporelles en unités arbitraires de la force et de la puissance injectée dans cas périodique (traits fins) et aléatoire (traits épais).

2.2 Forçage

La tension de consigne U_c qui est amplifiée puis appliquée aux bornes de la bobine et de la résistance est construite à partir d'un signal $s(t)$ composé d'une partie périodique sinusoidale et d'une partie aléatoire d'un poids relatif α ,

$$s(t) = \alpha\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t) + (1 - \alpha)\xi(t), \quad (3)$$

où $f_0 = 75Hz$ et $\xi(t)$ est un bruit blanc de largeur spectrale $(0.0016Hz - 75Hz)$ avec $\langle \xi^2 \rangle = 1$ et $\langle \xi \rangle = 0$. La tension de consigne est normalisée pour chaque valeur de α de sorte que

$$U_C(t) = \frac{s(t)}{\sqrt{\langle s^2 \rangle}} \quad (4)$$

Les cas $\alpha = 1$ décrivant le forçage périodique et $\alpha = 0$ pour le forçage aléatoire sont ceux qui ont été étudié dans [7] sur des temps longs. Ici, on réalise une acquisition de 600s pour chaque valeur de α comprise entre 0 et 1. Le courant dans la bobine et donc la force s'appliquant à l'aimant ne correspond pas exactement à la tension de consigne $U_C(t)$, mais résulte du filtrage passe-bas du circuit (LR) dont la fréquence de coupure se situe vers $10Hz$. C'est pourquoi sur la figure 2, la valeur *rms* de la force, σ_F , augmente quand α diminue alors que la valeur *rms* de la tension de consigne reste constante. En conséquence on observe aussi une augmentation de la valeur *rms* de la réponse en vitesse σ_v quand α diminue. Un exemple de traces temporelles de la puissance injectée dans la plaque

$$p(t) = v(t)F(t) \quad (5)$$

est montré sur la Figure 1(b) pour les deux cas extrêmes de forces appliquées. La puissance moyenne

$$\langle p(t) \rangle = \langle v(t)F(t) \rangle = r\sigma_v\sigma_F. \quad (6)$$

représentée sur la figure 2 augmente aussi au fur et à mesure que le forçage devient purement aléatoire par contre le coefficient de corrélation diminue, il est maximum pour le forçage périodique ($\alpha = 1$) et minimum pour le forçage aléatoire ($\alpha = 0$). On s'attend donc à ce qu'à σ_F constant, le forçage aléatoire soit moins corrélé et donc moins dissipatif que le forçage périodique. La valeur *rms* de la puissance σ_p suit globalement la même variation que la puissance moyenne.

3 Résultats

3.1 PDF de puissance injectée

Les fonctions de densités de probabilités (PDF) réduites sont présentées sur la Figure 3. On peut observer sur cette figure la variation continue de la forme des PDF depuis le forçage aléatoire $\alpha = 0$ jusqu'au forçage périodique $\alpha = 1$. Pour ces deux cas limites, les modèles statistiques [7] périodique et aléatoire sont en très bon accord avec les statistiques obtenues. Le modèle pour le forçage périodique consiste à prendre la fluctuation de vitesse comme une superposition d'une variable proportionnelle à la force périodique et d'un bruit gaussien, les deux variables étant décorréelées mis à part leur amplitude. Le bruit gaussien joue le rôle du retour turbulent de la plaque sur l'injection. Pour le modèle du forçage aléatoire, la vitesse et la force sont prises comme deux variables aléatoires gaussiennes corrélées. La loi binormale qui en découle permet de calculer la statistique de la puissance injectée [10]. Quel que soit le modèle, il n'y a pas de paramètres ajustables, seules les mesures expérimentales des *rms* de la force et de la vitesse ainsi que de la corrélation r sont nécessaires.

3.2 Théorème de fluctuation

Nous nous intéressons maintenant à la puissance injectée (adimensionnée) pendant un intervalle de temps τ ,

$$\epsilon_\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{p(t')}{\langle p \rangle} dt', \quad (7)$$

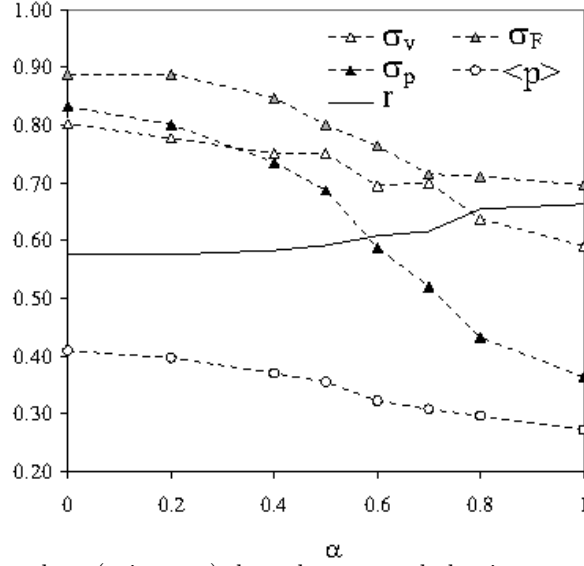


Fig. 2. Evolution en fonction de α (voir texte) des valeurs rms de la vitesse normale σ_v , force σ_F , puissance injectée σ_p , de la puissance moyenne injectée $\langle p \rangle$ et de la corrélation r définie par $\langle p \rangle = r\sigma_v\sigma_F$.

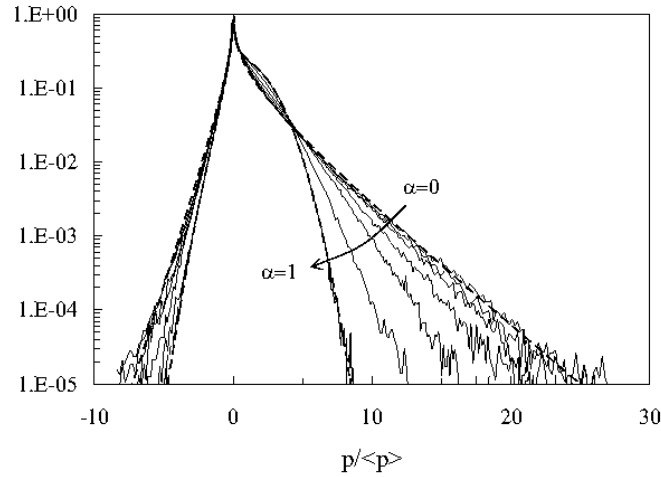


Fig. 3. PDF de la puissance injectée en fonction de α (0;0.2;0.4;0.5;0.6;0.7;0.8;1). Les courbes discontinues sont les modèles [7] périodique ($\alpha = 1$) et aléatoire ($\alpha = 0$).

et à la fonction d'asymétrie

$$\rho(\epsilon_\tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\pi(+\epsilon_\tau)}{\pi(-\epsilon_\tau)}, \quad (8)$$

où $\pi(\epsilon_\tau)$ est la fonction de densité de probabilité de ϵ_τ . La quantité $\rho(\epsilon_\tau)$ est centrale pour le théorème de fluctuation [1,2,3], dont les conclusions mènent à la relation linéaire $\rho(\epsilon_\tau) \simeq \delta\epsilon_\tau$ pour $\tau \rightarrow \infty$.

Les PDF $\pi(\epsilon_\tau)$ pour $\tau = 1/f_0 = 13.3\text{ms}$ sont représentées en fonction de α sur la figure 4(a). Elles se déforment continument de la gaussienne pour $\alpha = 1$ vers une forme fortement asymétrique pour $\alpha = 0$. On peut voir la conséquence de cette variation de la forme sur la fonction d'asymétrie de la figure 4(b). Elle est raisonnablement linéaire pour le forçage périodique avec une pente de $\delta_P = 670\text{Hz}$ et présente une courbure qui s'accroît au fur et à mesure que le forçage devient aléatoire. Sur le même graphique

nous avons tracé le modèle de Farago [11] qui considère un oscillateur linéaire forcé aléatoirement. La pente à l'origine décroît quand α diminue, plus le forçage est aléatoire et plus le temps caractéristique augmente.

3.3 Discussions

On observe la dégradation des conclusions du théorème de fluctuation en fonction du degré de stochasticité du forçage mesuré ici par α (0 pour un forçage aléatoire et 1 pour un forçage périodique sinusoïdal). Une des raisons évoquée pour cette dégradation dans [7] est fondée sur l'idée qu'en forçage aléatoire la réponse du système est dominée par une réponse linéaire au forçage aléatoire. Cette situation est totalement décrite dans la théorie de Farago [11] et ne vérifie pas le théorème de fluctuation. D'un autre coté, la réponse au forçage aléatoire produit des PDF $\pi(\epsilon_\tau)$ qui convergent difficilement vers des gaussiennes quand $\tau \rightarrow \infty$. Ceci est dû au contenu spectral du forçage, qui présente, lorsque α diminue, un contenu en basses fréquences de plus en plus important. Ainsi, la fonction ϵ_τ qui est un intégrateur présentera des fluctuations de plus en plus grandes quand $\alpha \rightarrow 0$. Cette dégradation sur la forme des PDF est aussi un élément contribuant à la non validité du théorème de fluctuation pour le cas du forçage aléatoire.

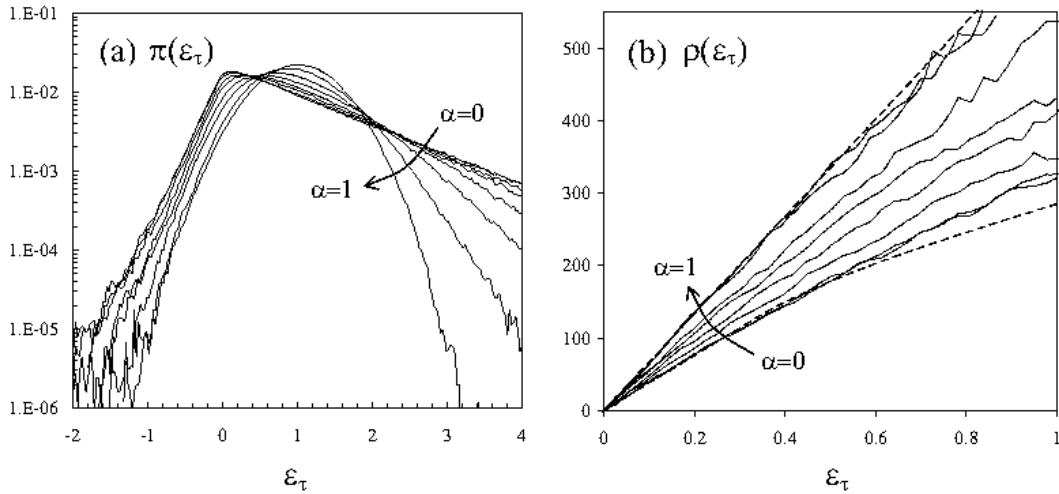


Fig. 4. (a) : PDF $\pi(\epsilon_\tau)$ pour $\tau = 1/f_0 = 13.3\text{ms}$ en fonction de α . (b) : Fonctions d'asymétrie ρ_τ correspondantes à (a). Dans (b) la ligne pointillée courbée correspond à la prédiction théorique [11] pour un oscillateur linéaire excité aléatoirement : $\rho(\epsilon_\tau) = 4\gamma\epsilon_\tau$ pour $\epsilon_\tau < 1/3$, et $\rho(\epsilon_\tau) = 7\gamma\epsilon_\tau/4 + 3\gamma/2 - \gamma/(4\epsilon_\tau)$ pour $\epsilon_\tau > 1/3$; avec ici $4\gamma = \delta_R = 480\text{Hz}$. La ligne pointillée droite est de pente $\delta_P = 670\text{Hz}$.

Références

1. D. J. EVANS, E. G. D. COHEN & G. P. MORRIS, Probability of Second Law Violations in Shearing Steady States, *Physical Review Letters*, **71**, 2401–240 (1993).
2. G. GALLAVOTTI & E. G. D. COHEN, Dynamical Ensembles in Nonequilibrium Statistical Mechanics, *Physical Review Letters*, **74**, 2694–2697 (1995).
3. J. KURCHAN, Fluctuation theorem for stochastic dynamics, *Journal of Physics A*, **31**, 3719–3729 (1998).
4. G. DURING, C. JOSSEMAND & S. RICA, Weak Turbulence for a Vibrating Plate : Can One Hear a Kolmogorov Spectrum? *Physical Review Letters*, **97**, 025503 (2006).

5. A. BOUDAUD, O. CADOT, B. ODILLE & C. TOUZÉ, Observation of Wave Turbulence in Vibrating Plates, *Physics Review Letters*, **100**, 234504 (2008).
6. N. MORDANT, Are There Waves in Elastic Wave Turbulence? *Physical Review Letters*, **100**, 234505 (2008).
7. O. CADOT, A. BOUDAUD & C. TOUZÉ, Statistics of power injection in a plate set into chaotic vibration, *European Physical Journal B*, **66**, 399-407 (2008).
8. V. E. ZAKHAROV, V. S. LVOV & G. FALKOVICH, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I : Wave Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
9. A. C. NEWELL, S. NAZARENKO & L. BIBEN, Wave turbulence and intermittency, *Physica D*, **152-153**, 520-550 (2001).
10. E. FALCON, S. AUMAÎTRE, C. FALCÓN, C. LAROCHE & S. FAUVE, Fluctuations of Energy Flux in Wave Turbulence, *Physical Review Letters*, **100**, 064503 (2008).
11. J. FARAGO, Injected Power Fluctuations in Langevin Equation, *Journal of Statistical Physics*, **107**, 781-803 (2002).