

Echec de la technique de titration du bruit à distinguer un bruit coloré d'un chaos

Ubiratan S. Freitas¹, Luis A. Aguirre² & Christophe Letellier¹

¹ CORIA UMR 6614 - Université de Rouen, Av. de l'Université, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

² Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não Lineares, Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG, Brazil

freitas@coria.fr

Résumé. Identifier des comportements chaotiques à partir de données expérimentales, c'est-à-dire, des données contaminées par du bruit, reste un problème particulièrement délicat dans la mesure où une preuve définitive reste très difficile à fournir. De manière à éviter les faiblesses des techniques basées sur l'utilisation d'invariants géométriques (dimensions, exposants de Lyapunov), Poon et Barahona ont introduit une procédure de titration numérique qui compare les prédictions à un pas réalisées avec des modèles linéaires et non linéaires [1]. Le principe repose sur l'adjonction d'un bruit d'écart type σ jusqu'à ce que le modèle non linéaire ne permette pas de meilleures prédictions que le modèle linéaire. La limite de bruit $LB = \sigma$ correspond à ce niveau de bruit. A l'aide de deux contre exemples, nous montrons que cette technique ne permet pas de distinguer un bruit coloré d'un comportement chaotique.

Abstract. Identifying chaos from experimental data, that is, from data contaminated by noise, remains a very challenging problem for which conclusive arguments are still very difficult to provide. In order to avoid problems usually encountered with techniques based on geometrical invariants (dimensions, Lyapunov exponent, etc.), Poon and Barahona introduced a numerical titration method based on comparison between one-step-ahead predictions with linear and nonlinear techniques [1]. Its principle consists in adding some noise with a standard deviation σ up to the point that the nonlinear model cannot provide better predictions than the linear model. The noise limit $LB = \sigma$ corresponds to this noise level. Using two counter examples, we showed that this technique cannot distinguish colored noise from chaotic behavior.

1 Introduction

Lorsqu'une série temporelle du monde réel est étudiée, il est nécessaire d'appréhender sa dynamique sous-jacente qui, la plupart du temps, résulte d'une relation complexe entre des composantes déterministe et stochastique [2]. Une attention spéciale est portée à l'identification la composante déterministe. Parfois cet objectif se résume à une technique de détection qui suppose l'existence d'une composante déterministe. Plusieurs techniques ont été proposées pour détecter le chaos mais aucune n'est complètement fiable. Toutes sont liées à certaines propriétés topologiques ou des mesures d'information sur les attracteurs reconstruits à partir des données [3,4] et présentent des problèmes de spécificité et de fiabilité [5,6]. Il est connu que le plus grand exposant de Lyapunov ne permet pas de distinguer un comportement chaotique du bruit [7]. Avant de poursuivre, rappelons en quoi consiste un comportement chaotique : il doit être aperiodique, sensible aux conditions initiales, borné et déterministe. Les trois premières propriétés sont relativement aisées à montrer, par contre, la quatrième — qui signifie que la dynamique est gouvernée par un processus qui peut être décrit par un jeu d'équations différentielles ordinaires ou des équations discrètes — est de loin la plus ardue. Il peut être également décrit par une équation différentielle à retard comme c'est souvent le cas en biologie. Typiquement, le déterminisme est un paradigme selon lequel les événements futurs sont induits par les événements passés et présents combinés avec les lois de la nature. Un tel déterminisme prend date avec Laplace. Ce qui a brouillé l'image donné par Laplace, c'est que lorsqu'une nonlinéarité a été introduite, il n'est plus possible de prévoir le futur sur un temps infini. Les prédictions de dynamiques nonlinéaires peuvent seulement être faites à court terme. En raison de

cette dernière propriété, identifier un déterminisme sous-jacent à des données expérimentales est plutôt un problème ardu, principalement parce qu'un comportement chaotique ne peut être distingué d'un comportement stochastique d'un point de vue statistique [8]. Avant d'affirmer qu'une dynamique puisse être chaotique, il devrait y avoir une évidence indiscutable de déterminisme [9].

Implicitement, le déterminisme sous-jacent est considéré en termes de déterminisme de basse dimension, juste parce que lorsque la dimension est trop grande, un tel déterminisme ne peut plus être distingué d'un processus stochastique. Habituellement, une dynamique de basse dimension signifie que le comportement peut être décrit dans un espace des phases de dimension qui ne dépasse pas la dizaine. Prouver que la dynamique sous-jacente à une série temporelle contaminée par du bruit correspond à un comportement chaotique de basse dimension est l'un des problèmes les plus difficiles à résoudre. C'est l'une des principales raisons pour lesquelles les analyses reposant sur des données supplétives sont souvent utilisées [10]. Malheureusement, ces techniques testent seulement si la dynamique étudiée peut être distinguée de données supplétives, ou non. Ceci ne constitue par conséquent par une réponse directe et définitive à la question originale, soit identifier le déterminisme sous-jacent.

Pour pallier à cette difficulté, quelques techniques pour détecter la présence de déterminisme non-linéaire au sein de dynamiques expérimentales ont été proposées (voir par exemple [11,12]). Mais aucune de ces techniques n'est réellement fiable. Parmi ces techniques, une technique basée sur une titration numérique a été proposée [1]. Les auteurs ont utilisés plusieurs noms dont celui de « titration du chaos » [1] ou plus récemment de « titration du bruit » [13,15]. Comme nous le verrons, cette technique identifie de manière erronée des systèmes non déterministes comme étant chaotiques : elle ne peut donc fournir une distinction fiable entre chaos et bruit.

2 Titration du chaos

La technique de Poon et Barahona [1] repose sur deux principes : une méthode de détection non-linéaire [16] et une addition graduelle de bruit. Ils ont prétendus que leur technique fournissait une condition suffisante et robuste pour tester la présence de chaos déterministe au sein de série temporelle courte et bruitée. La méthode de détection de non-linéarité est appliquée à la série temporelle étudiée. Elle est capable de déterminer si les données sont mieux décrites par un modèle non linéaire que par un modèle linéaire. Ensuite, du bruit blanc ou linéairement corrélé est progressivement ajouté aux données jusqu'à ce la méthode de détection de non-linéarité échoue à détecter une non-linéarité. La déviation standard normalisée du bruit ajouté à ce point est ce qui est appelé la limite de bruit (LB) et est présentée comme une mesure de « l'intensité du chaos ». La condition $LB > 0$ est prétendue comme étant suffisante pour déduire la présence de chaos au sein des données.

La question se résume donc à savoir si $LB > 0$ implique réellement un comportement chaotique. Dans leur étude, Poon et Barahona [1] ne considèrent que des systèmes déterministes, chaotiques ou non, et bruités. Il est montré que, pour certains types de systèmes, la limite LB est corrélée au plus grand exposant de Lyapunov λ_{\max} , au moins lorsque λ_{\max} est positif. Ainsi, la conclusion $LB > 0$ implique chaos est dressée sur la base des analyses du comportement de la méthode avec ces exemples. Aussi, une question naturelle est de regarder si cette conclusion reste valide si d'autres types de systèmes sont étudiés. La réponse est négative comme nous allons le montrer.

3 Des cas non chaotiques avec $LB > 0$

Considérons l'application sinusoïdale $x_{n+1} = \mu \sin(x_n)$ où μ est le paramètre de bifurcation. Cette application est équivariante puisqu'appliquer le changement de variables $x_n \mapsto -x_n$ conduit à $x_{n+1} \mapsto -x_{n+1}$. Ceci signifie que les solutions de l'application sinusoïdale présente des propriétés résultant d'une symétrie d'ordre 2. Par exemple, lorsque $\mu \in [2 ; 3.1]$, il y a co-existence de deux solutions symétriques l'une de l'autre sous le changement de variables $x_n \mapsto -x_n$. Lorsque le paramètre μ est augmenté, deux cascades de doublements de période simultanées sont observées comme route vers le chaos.

Une dynamique déterministe non chaotique excitée par un bruit est obtenu en utilisant

$$x_{n+1} = \mu \sin(x_n) + Y_n \eta_n, \quad (1)$$

qui produit un cycle limite de période 2 lorsque ($\mu = 2.4$). La variable Y_n est une variable aléatoire résultant d'un processus de Bernoulli et η_n est une variable aléatoire uniformément distribuée entre $-b$ et b . La valeur de chaque Y_n est 1 avec la probabilité q et 0 avec la probabilité $1 - q$. Lorsque q est petite, les perturbations stochastiques sont plutôt rare et la dynamique produite par (1) et l'application sinusoidale sont presque semblable.

Mille itérations de l'application (1) sont produites avec les paramètres $q = 0.01$, $\mu = 2.4$ et $b = 2$ (Fig. 1). Le comportement résultant est grosso modo un cycle limite de période 2, aléatoirement déstabilisé par des perturbations stochastiques, $Y_n \eta_n$, qui sont parfois suffisantes pour envoyer la trajectoires vers la solution symétrique, comme cela est observé autour de l'itération 620 (Fig. 1).

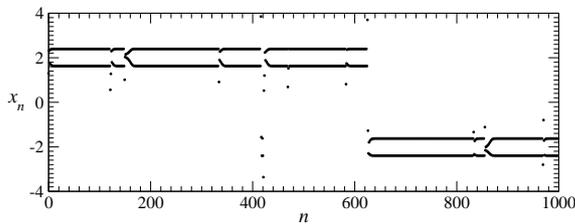


Fig. 1. Série temporelle (1000 points) produite par l'application (1). Valeurs des paramètres : $\mu = 2.4$, $b = 2$ and $q = 0.01$.

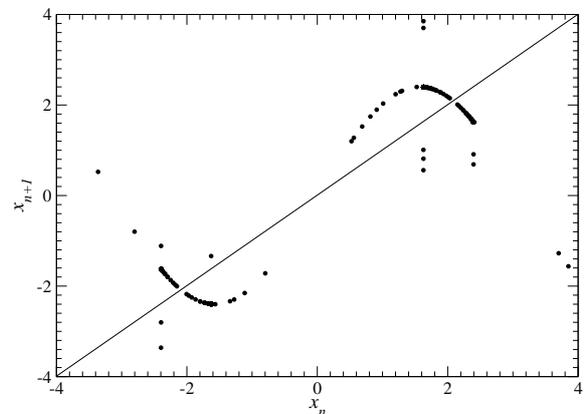


Fig. 2. Application de premier retour calculée à partir de la trajectoire solution de l'application (1).

Avec $q = 0.01$, seules 11 perturbations sont observées. Après chaque perturbation stochastique, il y a un court régime transitoire durant lequel la trajectoire s'installe sur l'un des deux cycles limites co-existant. Lorsque l'application de premier retour est calculée (Fig. 2), deux paraboles tronquées entourées de points aléatoirement distribués sont distinguées. Les formes « paraboliques » sont visitées durant les régimes transitoires. Evidemment cette dynamique périodique bruitée n'est pas chaotique. Ceci est confirmée par le plus grand exposant de Lyapunov qui est négatif ($\lambda_{\max} = -0.65$).

Selon [1], du bruit blanc (ou linéairement corrélé) de variance croissante σ est ajoutée aux données jusqu'à ce que la non-linéarité ne soit plus détectée. Ceci est déterminé en comparant les prédictions du signal avec un modèle linéaire et un modèle non-linéaire pour des σ croissants. Supposant une non-linéarité dans les données, les modèles non-linéaires seront meilleurs jusqu'à une valeur limite de σ qui est alors considérée comme la limite de bruit (LB) au delà de laquelle il n'y a plus avantage à utiliser un modèle non-linéaire pour la prédiction. Sur ce principe, Poon et Barahona affirment que $LB > 0$ indique la présence de chaos, et que la valeur de LB offre une estimation de son intensité relative. Si une telle hypothèse était vraie, une limite de bruit autour de 0 devrait être attendue dans l'exemple précédent, puisque la dynamique n'est pas chaotique. Cependant, lorsque la titration du bruit est appliquée, la limite de bruit obtenue est de $LB = 20\%$ ce qui suggère incorrectement que la dynamique sous-jacente est chaotique. Cette conclusion est obtenue par le fait que la solution périodique bruitée est mieux prédite par un modèle non-linéaire que par un modèle linéaire (Fig. 3). Ceci constitue par conséquent un premier exemple où la titration du bruit échoue à distinguer un comportement chaotique d'un comportement périodique bruité. Un tel échec n'avait jamais été observé par Poon et Barahona parce qu'ils ont toujours étudiés des dynamiques purement déterministes contaminées additivement par du bruit. Dans un article récent,

différents types de bruit ont été étudiés et les faiblesses de la titration du bruit avaient déjà été mentionnées [14].

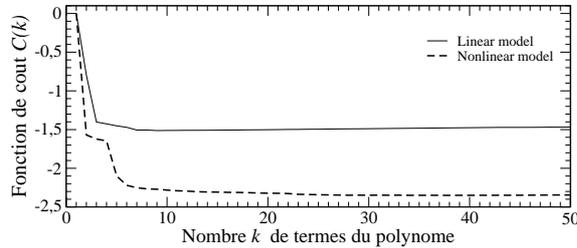


Fig. 3. Fonction de coût $C(k)$ pour les modèles linéaire et nonlinéaire. Les données sont approchées par des modèles autorégressifs linéaires et nonlinéaires dont le nombre k de termes est croissant. La fonction de coût est définie par $C(k) = \log_e \epsilon(k) + \frac{k}{N}$ où k est le nombre de termes, $\epsilon(k)$ est l'erreur résiduelle, et N est la longueur de la série temporelle [16].

Un second exemple est maintenant considéré. De manière à produire un bruit coloré non linéaire, un bruit blanc est utilisé pour exciter un filtre non linéaire selon

$$x_{n+1} = av_n + bv_{n-1}(1 - \nu_n) \quad (2)$$

où ν_n est une variable aléatoire uniformément distribuée entre 0 et 1. C'est un comportement purement aléatoire. Son caractère stochastique est bien mis en évidence par l'application de premier retour qui ne présente aucune structure déterministe (comme une parabole ou autre). Puisque la dynamique sous-jacente est sensible aux conditions initiales, le plus grand exposant de Lyapunov est positif.

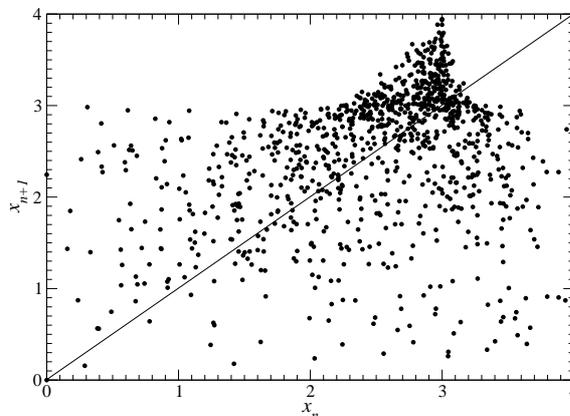


Fig. 4. Application de premier retour calculée à partir de la trajectoire produite par (2).

Appliquer la titration du bruit à la solution stochastique de l'application (2) conduit à une limite de bruit LB=35%. Selon Poon et Barahona, ceci indiquerait que ces données correspondent à un chaos avec une intensité supérieure à l'exemple précédent. Une fois de plus ce serait une conclusion biaisée. Ce qui est titré est en fait l'action de la non linéarité. Ainsi, cette technique — si appliquée comme l'ont suggéré ces auteurs — concluerait de manière erronée à une dynamique déterministe chaotique bien qu'aucune signature claire de déterminisme n'ait été mise en évidence. La raison est semblable à celle du cas précédent, c'est-à-dire que le bruit coloré est prédit plus précisément avec un modèle non linéaire qu'avec un modèle linéaire (Fig. 5).

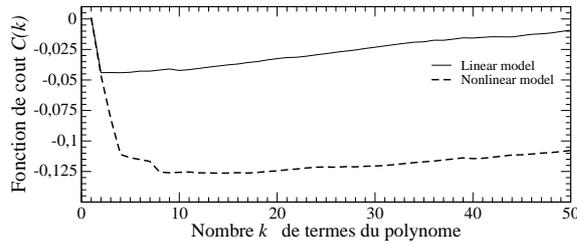


Fig. 5. Fonction de coût $C(k)$ pour les modèles linéaires et non linéaires. Cas du bruit chaotique (2).

Nous cherchons maintenant quelle dynamique purement chaotique pour laquelle la limite de bruit est autour de 35%. Pour cela, nous considérons une fonction logistique

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad (3)$$

pour des valeurs croissantes du paramètre μ . Nous avons finalement trouvé qu'avec $\mu = 3.62$, la limite de bruit était d'environ 35%. Pour cette valeur de μ , l'application de premier retour se présente comme une parabole à deux segments (Fig. 6). Ceci signifie que lors d'un test aveugle, la titration du bruit ne ferait pas de différence entre le bruit coloré (Fig. 4) et le comportement purement chaotique (Fig. 6).

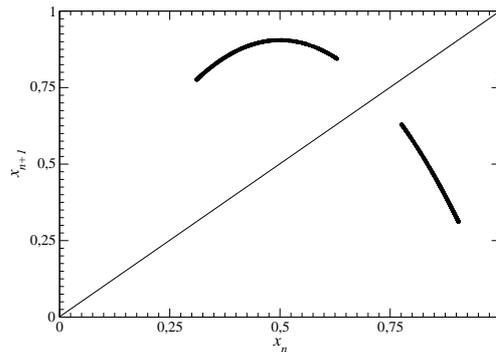


Fig. 6. Application de premier retour calculée à partir de la trajectoire produite par la fonction logistique (3). Valeur du paramètre : $\lambda = 3.62$.

Les exemples précédents montrent que la titration du bruit échoue à discriminer du bruit d'un chaos lorsqu'il n'y a pas de déterminisme sous-jacent. Ceci n'avait jamais été observé auparavant car l'article original considérait seulement des dynamiques déterministes. Aussi, lorsque des données expérimentales sont considérées, il n'est pas possible de fournir une affirmation définitive tant que la présence d'une signature déterministe n'est pas clairement identifiée.

4 Conclusion

Affirmer la présence de chaos à partir de données expérimentales est un problème plutôt délicat. En considérant cet aspect, montrer la basse dimensionalité de la dynamique est un aspect plutôt important parce qu'il est toujours possible de supposer que des processus naturels — dont la dimension peut être très grande — soient déterministes par définition [15]. Toutefois, une telle hypothèse présente un caractère de nature inévitablement métaphysique. En effet, fournir une preuve de déterminisme est l'un des objectifs les plus difficiles que nous ayons à atteindre lorsque des données expérimentales sont étudiées. Les techniques de modélisation globales se présentent comme capable de répondre à cet enjeu [17] bien qu'elle soit dépendantes du choix de l'observable [18]. Comme d'autres techniques de détection de nonlinéarités, lorsque l'objectif est de décider si une dynamique est chaotique ou non, la titration du bruit échoue aussi

sous certaines conditions. En d'autres termes, la condition $LB > 0$ n'est *pas* une condition suffisante pour l'existence du chaos. En effet, la titration du chaos nous apprend plus sur le caractère nonlinéaire d'un processus dynamique que sur « l'intensité du chaos » comme nous l'avons montré par les deux exemples ici traités.

Remerciements

U. Freitas est actuellement en post-doctorat soutenu financièrement par ADIR ASSISTANCE. Ce travail est partiellement financé par une convention CNRS/CNPq.

Références

1. C.-S. POON & M. BARAHONA, Titration of chaos with added noise, *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)*, **98**, 7107-7112 (2001).
2. M. CENCINI, M. FALCIONI, E. OLBRICH, H. KANTZ & A. VULPIANI, Chaos or noise : difficulties of a distinction, *Physical Review E*, **62** (1), 427-437 (2000).
3. P. GRASSBERGER & I. PROCCACCIA, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D*, **9** (189-208 (1983).
4. A. WOLF, J. B. SWIFT, H. L. SWINNEY & J. A. VASTANO, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physics D*, **16** (285-317 (1985).
5. J. P. ECKMANN, S. OLIFFSON, D. RUELLE, S. CILIBERTO, Lyapunov exponents from time series, *Physical Review A*, **34** (6), 4971-4979 (1986).
6. A. PROVENZALE, L. A. SMITH, R. VIO & G. MURANTE, Distinguishing between low-dimensional dynamics and randomness in measured time series, *Physica D*, **58** (1-4), 31-49 (1992).
7. M. DÄMMIG & F. MITSCHKE, Estimation of Lyapunov exponents from time series : the stochastic case, *Physics Letters A*, **178**, (5-6), 385-394 (1993).
8. J. LEYSEN & H. PASTIJN, Chaos, determinism and stochasticity, *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, **111**, 646-653 (1988).
9. L. GLASS, Chaos and heart rate variability, *Journal of Cardiovascular Electrophysiology*, **10** (1358-1360 (1999).
10. H. KANTZ & T. SCHREIBER, *Nonlinear time series analysis*, Cambridge University Press (1997).
11. J. THEILER, A. LOGTIN, S. EUBANK, B. GALDRIKIAN & J. D. FARMER, Testing for nonlinearity in time series : the method of surrogate data, *Physica D*, **58**, 77-94 (1992).
12. P. SO, E. OTT, T. SAUER, B. J. GLUCKMAN, C. GREBOGI & S. J. SCHIFF, Extracting unstable periodic orbits from chaotic time series data, *Physical Review E*, **55**, 5398-5417 (1997).
13. M. WYSOCKI, M.-N. FIAMMA, C. STRAUS, C.-S. POON & T. SIMIOWSKI, Chaotic dynamics of resting ventilatory flow in humans assessed through noise titration, *Respiratory Physiology & Neurobiology*, **153**, 54-65 (2006).
14. M. LEI & G. MENG, The influence of noise on nonlinear time series detection based on Volterra-Wiener-Korenberg model, *Chaos, Solitons & Fractals*, **36**(2), 512-516 (2008).
15. Z. SAMARA, M. RAUX, M.-N. FIAMMA, A. GHARBI, S. B. GOTTFRIED, C.-S. POON, T. SIMIOWSKI & C. STRAUS, Effects of inspiratory loading on the chaotic dynamics of ventilatory flow in humans, *Respiratory Physiology & Neurobiology*, **165** (1), 82-89 (2009).
16. M. BARAHONA & C.-S. POON, Detection of nonlinear dynamics in short noisy time series, *Nature*, **381** (215-217 (1996).
17. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & U. S. FREITAS, Frequently Asked Questions about global modelling, *Chaos*, submitted.
18. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & J. MAQUET, Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Phys. Rev. E*, **71**, 066213 (2005).