

La variété de courbure du flot comme squelette des attracteurs chaotiques

Jean-Marc Ginoux¹ & Christophe Letellier²

¹ Laboratoire PROTEE, I.U.T. de Toulon — Université du Sud, BP 20132, F-83957 La Garde Cedex, France

² CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

ginoux@univ-tln.fr

Résumé. Les portraits de phase se structurent principalement autour des points singuliers qui, toutefois, ne déterminent pas l'ensemble de cette structure. Récemment, des propriétés métriques du flot ont été analytiquement calculées pour des systèmes non intégrables dont les courbes solutions ne sont pas connues de manière générale. Ces propriétés métriques consistent en la *courbure du flot* et définissent, dans l'espace des phases, une variété reposant sur les dérivées temporelles du champ de vecteurs vitesse et contenant les points singuliers. Il s'agit de la *variété de courbure du flot*. Dans cette contribution, nous montrons que la composante non stationnaire — dépendante du temps — de cette variété structure l'attracteur chaotique et permet d'envisager une classification topologique reposant sur une démarche analytique. Quelques systèmes du type Rössler sont traités.

Abstract. Phase portraits are mainly structured around fixed points. But these fixed points cannot define the whole structure. This metric properties actually consist in the *flow curvature* and define, in the phase space, a manifold based on time derivatives of the vector field and containing fixed points. This is the *flow curvature manifold*. In this contribution, we show that the component depending on the time of this manifold structures the chaotic attractor and allows to design a topological classification based on an analytical approach. A few examples of Rössler-like systems are considered.

1 Introduction

Avec les descriptions toujours plus nombreuses de phénomènes naturels par des attracteurs chaotiques, un intérêt croissant a été porté au développement de techniques de caractérisation des comportements chaotiques. Typiquement, ces techniques se répartissent selon deux approches, l'une de nature statistique en lien avec la théorie ergodique [1,2], et l'autre de nature topologique [3]. A l'aide de la caractérisation topologique, différents types d'attracteurs chaotiques ont ainsi été répertoriés en dimension trois [3,4,5]. En dépit de cela, très peu a été dit sur la structure algébrique des équations gouvernant l'évolution des trajectoires sur ces attracteurs. Il est connu depuis les travaux de Poincaré que les équations conduisant à ces attracteurs chaotiques doivent être non linéaires, non intégrables et au moins de dimension trois, selon le théorème de Poincaré-Bendixson.

Ces conditions sont nécessaires mais non suffisantes. Plus récemment, il a été montré que les systèmes quadratiques d'équations différentielles ordinaires doivent être constitués d'au moins cinq termes [11]. De ce point de vue, la structure minimal d'un ensemble d'équations différentielles ordinaires produisant un attracteur chaotique correspond à quatre termes linéaires et un terme non linéaire (voyez [12] pour une revue sur la découverte d'exemples simples de flots chaotiques tels que les systèmes de Lorenz et Rössler). Le rôle prépondérant joué par les points singuliers dans la structure du portrait de phase fut initialement reconnu par Poincaré [6]. Cependant, les points singuliers ne nous disent pas tout, et l'allure des attracteurs ne peut pas être déduite des seuls points singuliers. Récemment, il a été établi que, bien que le système soit non intégrable, la courbure du flot pouvait être calculée analytiquement. Ainsi la localisation des points singuliers où la courbure s'annule définit une variété basée sur les dérivées temporelles du champ de vecteurs. Il s'agit de la variété de courbure de flot pour laquelle l'invariance sous le flot a été démontrée par le théorème de Darboux [9]. Nous nous intéressons à la manière dont la partie non stationnaire d'une telle variété structure les attracteurs et permet d'envisager leur classification.

2 Variété de courbure du flot pour les flots linéaires 3D

Un système dynamique consiste en des équations différentielles le plus souvent non intégrables. Dans ces articles, Poincaré contourne ce problème en étudiant les propriétés des courbes trajectoires dans l'espace des phases [10] :

[...] toute équation différentielle peut être écrite comme $\frac{dx_1}{dt} = X_1, \frac{dx_2}{dt} = X_2, \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n$ où les X_i sont des polynômes entiers. Si t est considéré comme le temps, ces équations définiront le mouvement d'un point variable dans un espace de dimension n .

Considérons le jeu d'équations différentielles

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathfrak{S}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

avec

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t \in E \subset \mathbb{R}^n \quad (2)$$

et

$$\mathfrak{S}(\mathbf{X}) = [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})]^t \in E \subset \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Le vecteur $\mathfrak{S}(\mathbf{X})$ définit un champ de vecteurs vitesse dans E dont les composantes f_i sont supposées être continues et infiniment différentiables par rapport à tout x_i et t , c'est-à-dire qu'elles sont supposées être des fonctions C^∞ dans E dont les valeurs sont dans \mathbb{R} . De plus, ce champ de vecteurs satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Une solution du système (1) est une courbe trajectoire $\mathbf{X}(t)$ tangente à \mathfrak{S} — excepté aux points fixes — dont les valeurs définissent les états du système dynamique. Puisqu'aucune des composantes f_i ne dépend explicitement du temps, le système est dit *autonome*.

Ainsi, les courbes trajectoires — des intégrales du système dynamique (1) — peuvent être regardées comme des courbes de dimension n . Elles possèdent des propriétés métriques locales, des **courbures**, qui peuvent être analytiquement déduites à partir de la formule de Frénet (voir section suivante) puisque seules les dérivées des courbes trajectoires sont impliquées dans la définition des courbures. Pour tout système dynamique de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , le concept de courbure peut être illustré comme suit. Une courbe de \mathbb{R}^2 est une courbe plane dont la *torsion* s'annule. Une courbe de \mathbb{R}^3 a deux courbures, la *courbure* et la *torsion*, correspondant respectivement à la première et la deuxième courbures. Les courbures mesurent la déviation de la courbe par rapport à une ligne droite en chacun de ces points. Rapidement, la torsion mesure l'intensité et le sens de la déviation de la courbe par rapport au plan osculateur défini comme le plan basé sur les vecteurs vitesse instantanée et accélération. Physiquement, une droite peut être déformée en une courbe tri-dimensionnelle en bandant (courbure) et en tordant (torsion). Une courbe de dimension n ($n > 3$) a $n - 1$ courbures qui peuvent être calculées selon une procédure de Gram-Schmidt. La variété de courbure du flot d'un système de dimension n s'écrit [8] :

$$\phi = \underbrace{\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \wedge \mathcal{J} \cdot \boldsymbol{\gamma})}_{\phi_S} + \underbrace{\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \wedge \dot{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{V})}_{\phi_{NS}}$$

où ϕ_S est la composante stationnaire et ϕ_{NS} la composante non stationnaire.

L'ensemble des points où la courbure du flot, c'est-à-dire la courbure de la trajectoire d'un système de dimension n , s'annule fournit directement une variété invariante de dimension $n - 1$ dont les équations analytiques sont données par

$$\phi(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} \wedge \ddot{\mathbf{X}} \wedge \dots \wedge \overset{n}{\ddot{\mathbf{X}}} \right) = \det \left(\dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \dots, \overset{n}{\ddot{\mathbf{X}}} \right) = 0 \quad (4)$$

où $\overset{n}{\ddot{\mathbf{X}}}$ représente les dérivées temporelles de \mathbf{X} . Pour une démonstration, voir [8]. Pour un système dynamique de dimension 3, l'ensemble de ces points forme une variété invariante de dimension 2 et dont les équations sont

$$\phi(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} \wedge \ddot{\mathbf{X}} \right) = \det \left(\dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}} \right) = 0 \quad (5)$$

Dans ce cas, la variété est définie par les points où la torsion s'annule.

Tout système dynamique de dimension n est tel que

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathcal{J}\dot{\mathbf{X}} \quad (6)$$

où \mathcal{J} est la matrice Jacobienne du système. Dériver (6) par rapport au temps t conduit à

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathcal{J}\ddot{\mathbf{X}} + \frac{d\mathcal{J}}{dt}\dot{\mathbf{X}}. \quad (7)$$

En injectant cette expression dans (4), nous obtenons

$$\phi(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left(\mathcal{J}\dot{\mathbf{X}} \wedge \mathcal{J}\ddot{\mathbf{X}} \right) + \dot{\mathbf{X}} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} \wedge \frac{d\mathcal{J}}{dt}\dot{\mathbf{X}} \right) \quad (8)$$

Ainsi, la partie stationnaire — non dépendante du temps — de $\phi(\mathbf{X})$ s'écrit

$$\phi_S(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left(\mathcal{J}\dot{\mathbf{X}} \wedge \mathcal{J}\ddot{\mathbf{X}} \right) \quad (9)$$

et la partie non stationnaire comme

$$\phi_{NS} = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} \wedge \frac{d\mathcal{J}}{dt}\dot{\mathbf{X}} \right). \quad (10)$$

Naturellement, ϕ_S est associé à la composante linéaire du champ de vecteurs vitesse et ϕ_{NS} à la composante non linéaire. Il a été établi [8] qu'au voisinage des points singuliers \mathbf{X}^* du flot, la variété de courbure du système (1) se confond avec le plan osculateur.

Il peut être montré que la composante stationnaire correspond au plan osculateur d'un point singulier intérieur (entouré par le flot). En conséquence, l'attracteur prend l'allure de ϕ_S au voisinage de ce point singulier. Cette partie ϕ_S ne peut être traversée par la trajectoire puisqu'elle est invariante sous l'action du flot. Dans le cas d'un point singulier de type col-foyer, la composante non stationnaire n'est pas nulle et définit deux ellipsoïdes prenant naissance sur le point singulier (Fig. 1d).

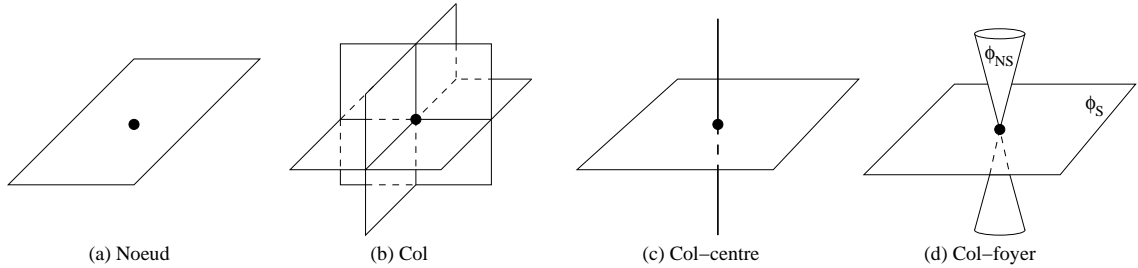


Fig. 1. Allures génériques de la variété de courbure du flot au voisinage des points singuliers.

3 Système de type Rössler

Le système de Rössler s'écrit [13] :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}. \quad (11)$$

Le système est centré *via* un déplacement rigide, c'est-à-dire que le point singulier intérieur, F_- , est placé à l'origine de l'espace des phases $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Dans le nouveau système de coordonnées, les équations sont

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z - y_- - z_- \\ \dot{y} = x + ay + x_- + ay_- \\ \dot{z} = b + z(x + x_- - c) + z_-x + z_-(x - c) \end{cases} \quad (12)$$

où $\frac{x_-}{a} = -y_- = z_- = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$ sont les coordonnées du point singulier intérieur du système (11). Le système peut ensuite être réécrit comme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = \tilde{b}x + z(x - \tilde{c}) \end{cases} \quad (13)$$

où $\tilde{b} = z_-$ et $\tilde{c} = c - x_-$. Le système de Rössler (13) a un point singulier F_+ localisé à l'origine de l'espace des phases et un autre localisé à

$$F_- = \begin{cases} x_- = \tilde{c} - a\tilde{b} \\ y_- = -\frac{x_+}{a} \\ z_- = \frac{x_+}{a} \end{cases} \quad (14)$$

La structure du flot au voisinage de l'origine du plan x - y est gouvernée dans une large mesure par le point singulier de type col-foyer situé à l'origine de l'espace des phases (par la suite désigné comme point singulier intérieur). En conséquence le flot « spirale » autour de ce point. A plus grande échelle, le flot s'organise autour de la variété unidimensionnelle stable du second point singulier F_- . Selon les allures génériques des composantes stationnaires de la variété de courbure du flot identifiées dans la section précédente, un schéma pour cette variété peut être tracé comme cela est représenté Fig. 2. Le point singulier intérieur F_+ a un plan associé à sa variété bidimensionnelle instable et un ellipsoïde est centré sur la variété unidimensionnelle stable. Le point extérieur F_- présente un ellipsoïde associé à la variété unidimensionnelle instable et un plan correspondant à la variété bidimensionnelle stable. Dans tous les systèmes étudiés ici, le point singulier intérieur a une variété bidimensionnelle instable et le point extérieur a une variété instable de dimension 1. A notre connaissance, il n'existe pas de système ayant un attracteur topologiquement équivalent à celui du système de Rössler qui serait organisé autour d'une variété stable de dimension 2.

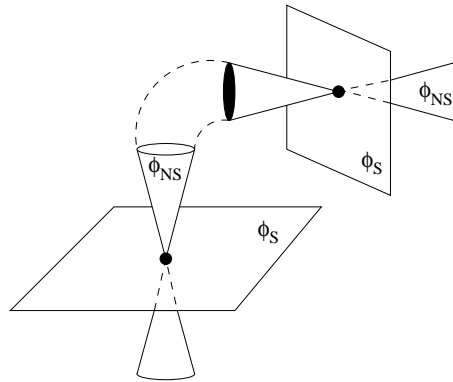


Fig. 2. Schéma de la variété de courbure du flot pour le système de Rössler. Deux ellipsoïdes issus des différents points singuliers se rejoignent pour former une « bulle ».

Ainsi, pour tout système à deux points singuliers, deux des quatre ellipsoïdes se rejoignent pour former une unique surface fermée. Puisque l'ellipsoïde émanant du point singulier extérieur se développe autour

de la variété unidimensionnelle instable, une courbe solution traversera cette surface excepté lorsqu'une connection hétérocline sera observée. Dans tous les autres cas, il existera un voisinage de la surface traversé par une courbe solution ; par conséquent, la surface n'est pas globalement solution du flot. Une première conséquence est qu'il n'est pas possible de plonger l'attracteur de Rössler à l'intérieur d'un tore de genre 1 dont le « trou » central se développerait selon cette portion fermée de la composante non stationnaire. La frontière toroïdale qui borne l'attracteur de Rössler doit nécessairement se structurer autour de la variété unidimensionnelle stable du point singulier intérieur, c'est-à-dire, en première approximation, l'axe z .

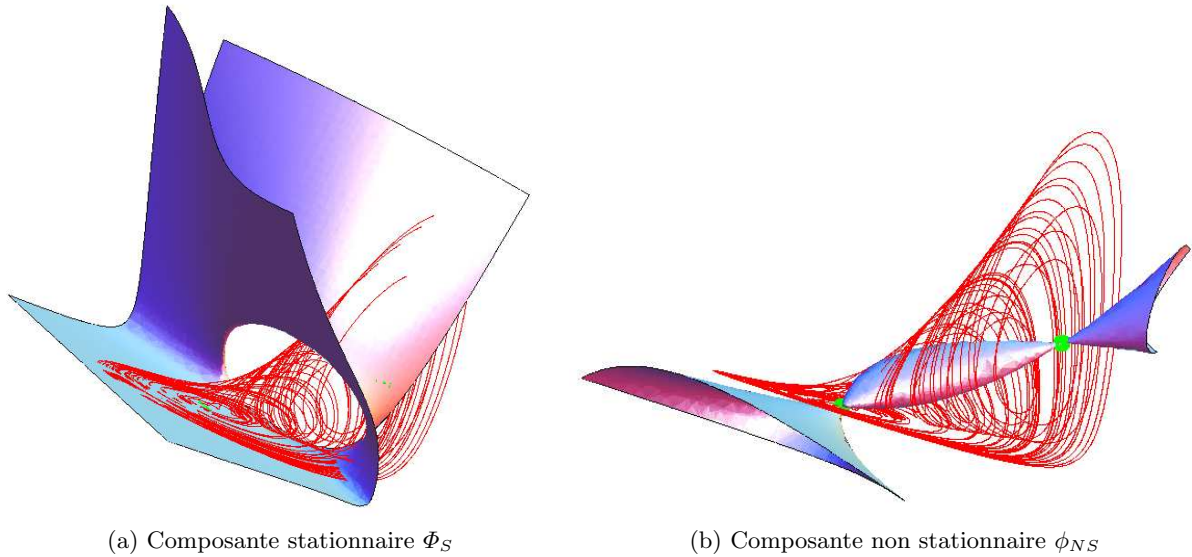


Fig. 3. Variété de courbure du flot pour le système de Rössler avec les valeurs de paramètres : $a = 0.556$, $b = 2$ et $c = 4$.

La variété de courbure du flot est alors calculée analytiquement pour le système de Rössler. Elle est représentée avec l'attracteur chaotique Fig. 3. Lorsque la trajectoire se développe dans le plan $x-y$, elle est gouvernée principalement par la partie linéaire du système (13) : la composante stationnaire Φ_S est alors tangente à l'attracteur. La trajectoire décolle du plan $x-y$ sous l'action de la nonlinéarité et c'est la composante non stationnaire qui prend le relais dans la structuration de la trajectoire solution du système de Rössler. Elle pilote la trajectoire en la contraignant à « spiraler » autour. Nous remarquons par ailleurs, que la partie nonlinéaire présente la structure attendue, deux ellipsoïdes ouverts et deux ellipsoïdes formant une surface fermée. Cette structure a été retrouvée sur l'ensemble des systèmes à deux points singuliers ayant un attracteur de Rössler pour solution (Tab. 1).

4 Conclusion

La variété de courbure du flot peut être décomposée en deux composantes, l'une stationnaire correspondant à la partie linéaire du flot, et l'autre instationnaire associée à la partie nonlinéaire du flot. Lorsque la trajectoire solution du système est principalement gouvernée par la partie linéaire du système, la variété de courbure de flot est tangente à l'attracteur ; en d'autres termes, elle correspond au plan osculateur de la trajectoire. Lorsque la trajectoire est principalement sous l'action de la nonlinéarité, la composante instationnaire pilote la trajectoire et la contraint à s'enrouler autour d'elle. Cette variété se révèle un complément de choix aux points singuliers — par ailleurs solution de cette variété — dans la structuration de la trajectoire dans l'espace des phases. Si les points singuliers permettent de donner les grandes lignes de l'organisation des trajectoires dans l'espace des phases, la variété de courbure du flot

Tab.1. Coefficients spécifiques de chaque système étudié et présentant un attracteur de Rössler pour solution. Les coefficients ici reportés correspondent au système centré, c'est-à-dire lorsque le point singulier intérieur est localisé à l'origine de l'espace des phases.

Système	$\dot{x} =$					$\dot{y} =$					$\dot{z} =$							# points singuliers	Référence
	x	y	z	xz	z^2	x	y	z	y^2	z^2	x	y	z	xy	xz	x^2	y^2		
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7		
(1) Rössler	0	-1	-1	0	0	+1	+a	0	0	0	\tilde{b}	0	$-\tilde{c}$	0	+1	0	0	2	[13]
(2) Sprott F	0	-1	+1	0	0	+1	+a	0	0	0	0	0	-1	0	0	+1	0	2	[14]
(3) Sprott G	0	-1	+1	0	0	+1	+a	0	0	0	0	0	-b	+1	0	0	0	2	[14]
(4) Sprott H	0	-1	0	0	+1	+1	+a	0	0	0	+1	0	-1	0	0	0	0	2	[14]
(5) Sprott K	0	-1	0	+1	0	+1	+a	0	0	0	+1	0	-b	0	0	0	0	2	[14]
(6) Sprott M	0	-1	0	0	0	+a	0	+1	0	0	+b	0	-1	0	0	-1	0	2	[14]
(7) Sprott O	0	+1	0	0	0	+1	0	-1	0	0	+1	+a	0	0	+1	0	0	2	[14]
(8) Sprott P	0	+a	+1	0	0	-1	0	0	+1	0	+1	+1	0	0	0	0	0	2	[14]
(9) Sprott Q	0	-1	0	0	0	+a	+b	0	0	+1	+1	0	-1	0	0	0	0	2	[14]
(10) Sprott S	0	+1	0	0	0	0	-a	-b	0	0	+2	+1	0	0	0	+1	0	2	[14]

permet de profiler l'allure de l'attracteur. Il se révèle particulièrement utile de décomposer cette variété en ses composantes stationnaire et instationnaire.

Références

1. J. P. ECKMANN & D. RUELLE, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Review of Modern Physics*, **57**, 617-656, 1985.
2. H. D. I. ABARBANEL, R. BROWN, J. J. SIDOROWICH & L. SH. TSIMRING. The analysis of observed chaotic data in physical systems, *Review of Modern Physics*, **65** (4), 1331-1388, 1993.
3. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The topology of chaos*, Wiley, 2002.
4. T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Strange attractors are classified by bounding tori, *Physical Review Letters*, **91** (13), 134104, 2003.
5. C. LETELLIER, E. ROULIN & O. E. RÖSSLER, Inequivalent topologies of chaos in simple equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **28**, 337-360, 2006.
6. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Série IV, **2**, 151-217, 1886.
7. J.-M. GINOUX & B. ROSETTO, Differential geometry and mechanics applications to chaotic dynamical systems, *International Journal of Bifurcations & Chaos*, **16** (4), 887-910, 2006.
8. J.-M. GINOUX, B. ROSSETTO & L. O. CHUA, Slow invariant manifolds as curvature of the flow of dynamical systems, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **18** (11), 3409-3430, 2008.
9. G. DARBOUX, Sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Série 2, **2**, 60-96, 123-143, 151-200, 1878.
10. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Série IV, **1**, 167-244, 1885.
11. Z. FU & J. HEIDEL, Non-chaotic behavior in three-dimensional quadratic systems, *Nonlinearity*, **10**, 1289-1303, 1997.
12. J. C. SPROTT & S. J. LINZ, Algebraically simple chaotic flows, *International Journal in Chaos Theory and Applications*, **5**, 3-22, 2000.
13. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398, 1976.
14. J. C. SPROTT, Some simple chaotic flows, *Physical Review E*, **50** (2), 647-650, 1994.