

Sur les systèmes à événements discrets non linéaires dans l'algèbre des dioïdes

Samir Hamaci¹ & Jean-Louis Boimond²

¹ EPMI/ECS, 13 bvd de l'Hautil, F- 95092 Cergy-Pontoise

² LISA, 62 avenue Notre Dame du Lac, F- 49000 Angers
s.hamaci@epmi.fr, Boimond@istia.univ-angers.fr

Résumé. Ce travail porte sur l'analyse des systèmes à événements discrets modélisables par des graphes d'événements temporisés avec multiplieurs. Ces modèles n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre des dioïdes. Cette non linéarité est due à la présence des poids sur les arcs. Pour pallier à ce problème de non linéarité, on propose une méthode de linéarisation de ces graphes, dans le but d'obtenir des représentations linéaires dans l'algèbre $(\min, +)$, ceci afin d'appliquer certains résultats développés dans le cadre de l'analyse des systèmes linéaires dans les dioïdes. Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, nous procédons à un ajout ou à un retrait de jetons (ressources) dans le graphe, afin de satisfaire la condition de linéarisation.

Abstract. We are interested to the analysis of timed event graphs with multipliers. The dynamical equation modelling such graphs are nonlinear in $(\min, +)$ algebra. This nonlinearity is due to multipliers and prevents from applying usual results used in dioid algebra. As an alternative, we propose a linearization method of timed event graphs with multipliers in $(\min, +)$ algebra. Lower and upper linear approximated models are proposed when linearization condition is not satisfied.

1 Introduction

Les réseaux de Petri sont des modèles graphiques souvent utilisés pour représenter les systèmes à événements discrets. Ils sont largement utilisés pour modéliser, évaluer, voire piloter de tels systèmes.

Les systèmes mettant uniquement en jeu des phénomènes de synchronisation et de saturation peuvent être modélisés par des réseaux de Petri particuliers, appelés graphes d'événements temporisés (GET). Ces derniers admettent une représentation linéaire sur une structure algébrique appelée l'algèbre des dioïdes (l'algèbre $(\min, +)$ étant un exemple de dioïde) [1,4]. Cette représentation est bien adaptée pour aborder notamment les problèmes d'évaluation de performances ou de commande.

Néanmoins, les techniques développées dans le cadre des systèmes à événements discrets atteignent leur limite lorsque la taille du système considéré est importante (du fait du nombre important d'entités). Il s'avère alors utile d'utiliser des GET à arcs pondérés, encore appelés GET avec multiplieurs (GETM), ce qui permet de réduire la taille du modèle.

Contrairement aux GET, les GETM n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre $(\min, +)$. Cette non linéarité — de par les poids sur les arcs — est due à la présence de parties entières dans le modèle $(\min, +)$ régissant l'évolution dynamique de ces graphes. Pour pallier au problème de non linéarité et pour pouvoir appliquer certains résultats développés dans le cadre de la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes, une méthode de linéarisation sera présentée. Cette méthode a pour but de linéariser le modèle mathématique régissant l'évolution dynamique des GETM, sous réserve de vérifier une condition de linéarisation sur le marquage initial, ceci afin d'obtenir un modèle $(\min, +)$ linéaire. Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, nous procédons à un ajout ou à un retrait de jetons (ressources) dans le graphe, afin de satisfaire la condition de linéarisation. Cette technique d'analyse nous permet d'encadrer la dynamique du GETM entre deux bornes : une valeur supérieure obtenue par l'ajout d'un nombre minimal de jetons dans le graphe, et une valeur inférieure obtenue par le retrait d'un nombre minimal de jetons. Pour illustrer cette méthode, un exemple d'application sera présenté.

2 Equation récurrentes des GETM's

On introduit brièvement la définition et quelques propriétés d'une classe des réseaux de Petri. Pour plus de détails [2]. Un graphe d'évènements temporisé (GET) est un réseau de Petri tel que toute place a exactement une transition en amont et une transition en aval. Les poids des arcs sont tous unitaires. Ces modèles modélisent les systèmes à évènements discrets mettant uniquement en jeu des phénomènes de synchronisation et de saturation. Ils admettent une représentation linéaire sur une structure algébrique appelée l'algèbre des dioïdes [1].

Un dioïde \mathcal{D} est un ensemble muni de deux lois de composition internes, notées \oplus (addition) et \otimes (multiplication), associatives et ayant chacune un élément neutre, noté respectivement ε et e , telles que \oplus est commutative et idempotente (*c'est-à-dire*, $a \oplus a = a$). De plus, la loi \otimes est distributive par rapport à la loi \oplus , et l'élément neutre ε est absorbant pour le produit (*c'est-à-dire*, $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$). Notons que le symbole \otimes est souvent omis.

Exemple

$\mathbb{Z}_{min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ est un dioïde commutatif où la loi additive \oplus correspond à l'opération \min ; la loi multiplicative \otimes est équivalente à l'addition usuelle. L'élément zéro de \mathbb{Z}_{min} est $\varepsilon = +\infty$ et l'élément identité est $e = 0$. Ce dioïde est appelé *l'algèbre (min, +)*.

On note $\bullet q$ (resp., $q \bullet$) l'ensemble des places situées immédiatement en amont (resp., en aval) de la transition n_q . Similairement, $\bullet p$ (resp., $p \bullet$) représente l'ensemble des transitions situées immédiatement en amont (resp., en aval) de la place p .

A la différence du modèle d'état classiquement associé à un RdP, l'état est associé non plus aux places d'un GET mais à ses transitions. La variable d'état considérée est un compteur d'évènements $x_q(t)$, défini de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, $t \mapsto x_q(t)$, où $x_q(t) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ correspond au nombre de tirs de la transition x_q ayant lieu jusqu'à la date t .

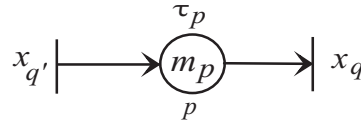


Fig. 1. GET élémentaire.

Pour illustrer l'évolution d'un compteur associé à la transition x_q d'un GET, considérons le GET élémentaire suivant (Fig. 1) :

$$x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} (m_p + x_{q'}(t - \tau_p)). \quad (1)$$

On remarque que cette équation est non linéaire dans l'algèbre usuelle de par la présence de l'opérateur \min qui modélise le phénomène de synchronisation¹ au niveau de la transition x_q . En revanche, elle se décrit de façon linéaire dans le dioïde \mathbb{Z}_{min} comme suit :

$$x_q(t) = \bigoplus_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} (m_p \otimes x_{q'}(t - \tau_p)). \quad (2)$$

Dans le cas où le poids d'un arcs est supérieur à 1, le GET devient pondéré. Ce type de modèle est appelé graphe d'évènements temporisés avec multiplieurs, noté GETM.

¹ Dans un GET, le phénomène de synchronisation se produit lorsque plusieurs arcs convergent sur une même transition.

Assertion L'évolution du compteur associé à la transition n_q du GETM élémentaire est donnée par l'équation suivante :

$$n_q(t) = \bigoplus_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} [M_{qp}^{-1}(m_p + M_{pq'}n_{q'}(t - \tau_p))]. \quad (3)$$

Dans la suite, les GETM considérés sont *consistant* (c'est-à-dire, il existe un T-invariant ${}^2\theta$ couvrant toutes les transitions : $\{q \in T | \theta(q) > 0\} = T$) et *conservatif* (c'est-à-dire il existe un P-invariant ${}^3 Y$ couvrant toutes les places : $\{p \in P | Y(p) > 0\} = P$).

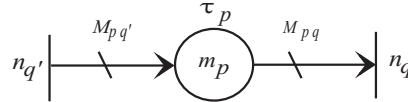


Fig. 2. GETM élémentaire.

L'évolution dynamique du GETM représenté Fig. 2 est décrite par les équations récurrentes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1(t) = \min(2 + 2n_2(t - 4), 2n_4(t - 4)), \\ n_2(t) = \min(\lfloor \frac{n_1(t-3)}{2} \rfloor, n_4(t - 3)), \\ n_3(t) = \min(\lfloor \frac{n_1(t-4)}{2} \rfloor, n_2(t - 4), n_5(t - 4)), \\ n_4(t) = \min(\lfloor \frac{3+3n_3(t-3)}{3} \rfloor, n_{10}(t - 3)), \\ n_5(t) = \min(1 + n_3(t - 2), n_{10}(t - 2)), \\ n_6(t) = 3n_5(t - 2), \\ n_7(t) = 2n_5(t - 1), \\ n_8(t) = 3 + n_6(t - 1), \\ n_9(t) = 2 + n_7(t - 1), \\ n_{10}(t) = \min(\lfloor \frac{n_8(t-2)}{3} \rfloor, \lfloor \frac{n_9(t-2)}{2} \rfloor). \end{array} \right.$$

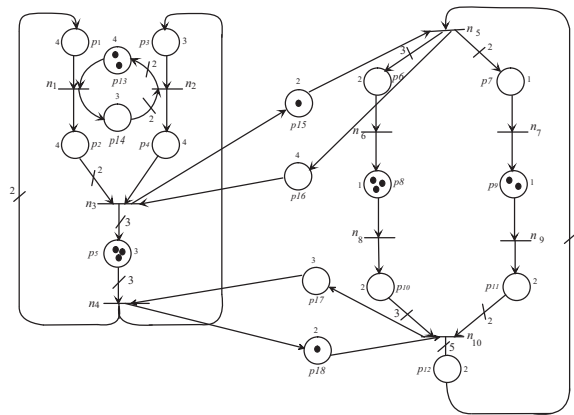


Fig. 3. GETM.

² Un vecteur $\theta \in \mathbb{N}^T$ tel que $\theta \neq 0$ et $W\theta = 0$ est un *T-invariant* (W est la matrice d'incidence).

³ Un vecteur $Y \in \mathbb{N}^P$ tel que $Y \neq 0$ et $Y^t W = 0$ est un *P-invariant*.

Contrairement aux GET, les GETM n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre $(\min, +)$. Cette non linéarité — de par les poids sur les arcs — est due à la présence de parties entières dans le modèle $(\min, +)$ régissant l'évolution dynamique de ces graphes. Pour pallier à ce problème de non linéarité et pouvoir, en suite, appliquer les résultats développés dans le cadre de l'analyse des systèmes linéaires dans l'algèbre $(\min, +)$, on propose une méthode de linéarisation du modèle mathématique associé à la dynamique des ces modèles.

3 Linéarisation des graphes d'évènements temporisés avec multipliers

Cette méthode a pour principe d'exprimer chaque composante de N en fonction d'une composante de X . Le fait que le GETM considéré soit consistant implique l'existence d'un T-invariant sur les transitions. En effet, chaque compteur $n_q(t)$ associé à la transition n_q du GETM s'exprime comme suit :

$$\forall q \in \mathcal{T}, \forall t \in \mathbb{Z}, n_q(t) = \theta_q x_q(t), \quad (4)$$

où

- $n_q(t)$ est le compteur associé à la transition n_q du GETM,
- θ_q est la composante $(\in \mathbb{N}^*)$ du T-invariant associée à la transition n_q du GETM.

3.1 Linéarisation exacte des graphes d'évènements temporisés discrets avec multipliers

Pour que le changement de variable (4) soit possible, c'est-à-dire pour que le GETM soit linéarisable, chaque compteur $x_q(t)$ doit appartenir au dioïde \mathbb{Z}_{min} . La proposition suivante donne la condition pour que le GETM soit linéarisable.

Proposition Un GETM est *linéarisable* si :

$$\forall q \in \mathcal{T}, \forall p \in \bullet q, \quad \lfloor \frac{m_p}{M_{qp}} \rfloor \in \theta_q \mathbb{N}. \quad (5)$$

Preuve Chaque compteur $n_q(t)$ d'un GETM satisfait la relation suivante :

$$n_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \lfloor M_{qp}^{-1} (m_p + M_{pq'} n_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor.$$

En utilisant le changement de variable (4) et la distributivité de la multiplication par rapport à l'opérateur \min , on obtient l'expression $x_q(t)$ suivante :

$$x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \frac{1}{\theta_q} \lfloor (\frac{m_p}{M_{qp}} + \frac{M_{pq'}}{M_{qp}} n_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor.$$

Notons $\theta = (\theta_1 \ \theta_2 \dots \theta_n)^t$ le vecteur T-invariant. Ce vecteur satisfait l'expression $C \times \theta = 0$, où C est la matrice d'incidence associée au GETM. Il en résulte, sachant que les graphes sont consistants et conservatifs [3], que :

$$\forall q', q \in \mathcal{T} \quad p \in P, M_{qp} \theta_q - \theta_{q'} M_{pq'} = 0.$$

De cette relation, on déduit que : $\frac{\theta_q}{M_{pq'}} = \frac{\theta_{q'}}{M_{qp}}$, par conséquent, $x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \frac{1}{\theta_q} \lfloor (\frac{m_p}{M_{qp}} + \frac{\theta_q}{\theta_{q'}} n_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor$, c'est-à-dire, $x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \frac{1}{\theta_q} \lfloor (\frac{m_p}{M_{qp}} + \theta_q x_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor$. Puisque $\theta_q x_{q'}(t - \tau_p)$ est un entier, nous obtenons :

$$x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} (\frac{1}{\theta_q} \lfloor \frac{m_p}{M_{qp}} \rfloor + x_{q'}(t - \tau_p)), \quad (6)$$

ce qui correspond à une équation récurrente $(\min, +)$ linéaire dès lors que $\frac{1}{\theta_q} \lfloor \frac{m_p}{M_{qp}} \rfloor \in \mathbb{N}$.

3.2 Linéarisation approchée par ajout/retrait de jetons

Cette méthode a pour principe d'approcher autant que possible, en utilisant la condition de linéarisation, le comportement du GETM initial. Il en résulte une approximation par valeur inférieure (resp., supérieure) obtenue par un retrait (resp., ajout) minimal de jetons dans les places ne satisfaisant pas la condition de linéarisation. On note \underline{X} (resp., \overline{X}) le vecteur d'état du GET ordinaire obtenu à l'issue de la linéarisation approchée par retrait (resp., ajout) de jetons dans le GETM.

En reprenant le même raisonnement que celui permettant d'établir la proposition, nous obtenons :

$$\underline{x}_q(t) = \min_{p \in \bullet_q, q' \in \bullet_p} \left(\frac{1}{\theta_q} \lfloor \frac{(m_p - \underline{m}_p)}{M_{qp}} \rfloor + \underline{x}_{q'}(t - \tau_p) \right), \quad (7)$$

où \underline{m}_p est le nombre minimum de jetons retirés de la place p tel que $\lfloor \frac{m_p - \underline{m}_p}{M_{qp}} \rfloor \in \theta_q \mathbb{N}$. De même, on a :

$$\overline{x}_q(t) = \min_{p \in \bullet_q, q' \in \bullet_p} \left(\frac{1}{\theta_q} \lfloor \frac{(m_p + \overline{m}_p)}{M_{qp}} \rfloor + \overline{x}_{q'}(t - \tau_p) \right), \quad (8)$$

où \overline{m}_p est le nombre minimum de jetons ajoutés dans la place p tel que $\lfloor \frac{m_p + \overline{m}_p}{M_{qp}} \rfloor \in \theta_q \mathbb{N}$. Sachant que le retrait (resp., l'ajout) de jetons dans un GETM ralentit (resp., accélère) l'évolution du graphe, on a par conséquent :

$$\forall q, \quad \theta_q \underline{x}_q(t) = \underline{n}_q(t) \leq n_q(t) \leq \overline{n}_q(t) = \theta_q \overline{x}_q(t).$$

3.3 Exemple

Considérons le GETM représenté par la figure 3. Ce graphe admet le T-invariant suivant

$$\theta^t = (2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1).$$

Linéarisation exacte On vérifie que chaque marquage d'une place satisfait la condition de linéarisation, ce qui signifie que le GETM est linéarisable. En utilisant le changement de variable (4), on obtient le modèle $(\min, +)$ linéaire suivant, issu de l'utilisation de l'équation (6) :

$$\begin{cases} x_1(t) = \min(1 + x_2(t-4), x_4(t-4)), \\ x_2(t) = \min(x_1(t-3), x_4(t-3)), \\ x_3(t) = \min(x_1(t-4), x_2(t-4), x_5(t-4)), \\ x_4(t) = \min(1 + x_3(t-3), x_{10}(t-3)), \\ x_5(t) = \min(1 + x_3(t-2), x_{10}(t-2)), \\ x_6(t) = x_5(t-2), \\ x_7(t) = x_5(t-1), \\ x_8(t) = 1 + x_6(t-1), \\ x_9(t) = 1 + x_7(t-1), \\ x_{10}(t) = \min(x_8(t-2), x_9(t-2)). \end{cases}$$

Linéarisation approchée par ajout/retrait de jetons : Pour le marquage initial suivant : $M(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$, on note que la place p_1 , marqué avec un jeton, ne satisfait pas la condition de linéarisation, ce qui motive l'utilisation de la méthode de *linéarisation approchée par ajout/retrait de jetons* dans le graphe. Le retrait d'un jeton dans la place p_1 permet de vérifier la condition de linéarisation, de même que l'ajout d'un jeton dans cette place. L'utilisation des

équations (7) et (8) permet d'obtenir les modèles linéaires approchés suivants :

$$\begin{cases} \underline{x}_1(t) = \min(1 + \underline{x}_2(t-4), \underline{x}_4(t-4)), \\ \underline{x}_2(t) = \min(\underline{x}_1(t-3), \underline{x}_4(t-3)), \\ \underline{x}_3(t) = \min(\underline{x}_1(t-4), \underline{x}_2(t-4), \underline{x}_5(t-4)), \\ \underline{x}_4(t) = \min(1 + \underline{x}_3(t-3), \underline{x}_{10}(t-3)), \\ \underline{x}_5(t) = \min(1 + \underline{x}_3(t-2), \underline{x}_{10}(t-2)), \\ \underline{x}_6(t) = \underline{x}_5(t-2), \\ \underline{x}_7(t) = \underline{x}_5(t-1), \\ \underline{x}_8(t) = 1 + \underline{x}_6(t-1), \\ \underline{x}_9(t) = 1 + \underline{x}_7(t-1), \\ \underline{x}_{10}(t) = \min(\underline{x}_8(t-2), \underline{x}_9(t-2)). \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \min(1 + \bar{x}_2(t-4), 1 + \bar{x}_4(t-4)), \\ \bar{x}_2(t) = \min(\bar{x}_1(t-3), \bar{x}_4(t-3)), \\ \bar{x}_3(t) = \min(\bar{x}_1(t-4), \bar{x}_2(t-4), \bar{x}_5(t-4)), \\ \bar{x}_4(t) = \min(1 + \bar{x}_3(t-3), \bar{x}_{10}(t-3)), \\ \bar{x}_5(t) = \min(1 + \bar{x}_3(t-2), \bar{x}_{10}(t-2)), \\ \bar{x}_6(t) = \bar{x}_5(t-2), \\ \bar{x}_7(t) = \bar{x}_5(t-1), \\ \bar{x}_8(t) = 1 + \bar{x}_6(t-1), \\ \bar{x}_9(t) = 1 + \bar{x}_7(t-1), \\ \bar{x}_{10}(t) = \min(\bar{x}_8(t-2), \bar{x}_9(t-2)). \end{cases}$$

Il reste à établir le lien entre le GETM et le GET résultant de la linéarisation. Ce lien est donné par la relation (4) qui lie le vecteur d'état N au vecteur d'état normalisé X . Pour cet exemple, nous avons $n_1(t) = 2x_1(t)$, autrement dit, à un tir de la transition x_1 correspond à deux tirs de la transition n_1 . Ainsi, le comportement dynamique du GETM se déduit facilement de celui du GET projeté sur les transitions x_1, \dots, x_{10} .

4 Conclusion

Dans cet article, on a présenté une méthode de linéarisation des GETM dans le but d'obtenir un modèle ($\min, +$) linéaire. Dans le cas où la condition de linéarisation n'est pas vérifiée, nous procédons à un ajout ou à un retrait de jetons (ressources) dans le graphe, afin de satisfaire la condition de linéarisation.

Références

1. F. BACCELLI, G. COHEN, G. OLSDER & J.-P. QUADRAT, *Synchronization and linearity : An algebra for discrete event systems*. Wiley, 1992.
2. T. MURATA, Petri Nets : properties, analysis and applications, *IEEE Proceedings*, **77** (4), 541–580, 1989.
3. A. MUNIER, A. (1993). Régime asymptotique optimal d'un graphe d'événements temporisé généralisé : Application à un problème d'assemblage, In *RAIPO-APII*, **27** (5), 487–513, 1993.
4. G. COHEN, S. GAUBERT, & J.-P. QUADRAT, Algebraic system analysis of timed petri nets, In : *Idempotency*, J. Gunawardena Ed., Collection of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, pp. 145-170, 1998.