

Conditions nécessaires de chaos pour le système de Sprott E

Jean-Marc Malasoma

Université de Lyon, DGCB URA CNRS 1652
ENTPE, Rue Maurice Audin, 69518 Vaulx en Velin Cedex
malasoma@entpe.fr

Résumé. Nous établissons de façon rigoureuse des conditions nécessaires pour que le système de Sprott E puisse admettre des solutions chaotiques. L'utilisation de ces conditions, permet de changer l'échelle du temps en respectant son sens, ainsi que les échelles des trois variables x , y et z . On obtient alors quatre paramètres unitaires et il reste un unique paramètre positif contrôlant la dissipation du flot. Cette méthode conduit à deux formes réduites. Dans un cas le système n'est jamais chaotique, tandis que l'autre il peut l'être pour certaines valeurs de son paramètre.

Abstract. In this paper we study the nonchaotic and chaotic behavior of the Sprott system E. We prove theorems which provide necessary conditions for solutions being chaotic. By using these necessary conditions, the system is rescaled in order to eliminate four parameters, possibly leaving an arbitrary \pm sign on one term. This rescaling cannot reverse the time. Two reduced systems are obtained. One is never chaotic, the second one may be chaotic for some values of its control parameter.

1 Introduction

Le système dynamique décrit en 1963 par Lorenz [1] possède une symétrie de rotation de π autour de l'axe Oz , symétrie qui n'est pas essentielle pour l'existence de solutions chaotiques. Son champ de vecteurs présente de plus une structure algébrique assez complexe comportant sept monômes dont deux sont quadratiques. En 1976, Rössler découvre un premier système chaotique [2] dépourvu de symétrie et possédant une structure algébrique plus simple que celle du système de Lorenz. Il est encore constitué de sept monômes mais un seul d'entre eux est quadratique. Trois ans plus tard, deux nouveaux modèles chaotiques constitués seulement de six monômes, dont un seul quadratique, ont été étudiés indépendamment l'un par Rössler [3] et l'autre par Couillet, Tresser et Arnéodo [4].

Depuis, un grand nombre de systèmes chaotiques ont été décrits dans la littérature. Toutefois, ce n'est qu'en 1994 que Sprott, ignorant l'existence des deux systèmes trouvés en 1979, relance la recherche de systèmes chaotiques quadratiques, présentant des structures algébriques plus simples que celle du système de Lorenz et que celle du premier système de Rössler. Après plusieurs mois de simulations numériques, il a mis en évidence [5] quatorze systèmes chaotiques constitués de six monômes dont une nonlinéarité et cinq systèmes chaotiques constitués de cinq monômes dont deux nonlinéarités.

Cette étude purement numérique n'est pas exhaustive, ainsi par exemple les deux systèmes de 1979 n'ont pas été retrouvés. Parmi ces dix-neuf systèmes, deux d'entre eux présentent la même symétrie que le système de Lorenz. Ils constituent les représentants de deux classes d'équivalence de systèmes quadratiques, équivariants par rotation de π autour de l'axe Oz et présentant une structure algébrique minimale autorisant des comportements chaotiques et j'ai proposé récemment une troisième classe de systèmes minimaux de type Lorenz [6].

Les dix-sept autres systèmes de 1994 ne sont pas minimaux. Toutefois en 1997 Sprott a mis en évidence deux nouveaux flots [7], équivalents et dépourvus de symétrie, avec une structure algébrique minimale c'est-à-dire constituée de cinq monômes dont un seul quadratique. Enfin en 2002 j'ai montré l'existence de sept nouveaux systèmes minimaux et chaotiques qui peuvent être regroupés avec les deux flots de Sprott de 1997 en deux classes d'équivalence [8].

2 Systèmes de Sprott à un seul point fixe : exemple du système E

Les sept systèmes de Sprott possédant un unique point d'équilibre sont désignés par D,E,I,J,L,N et R dans [5]. Ils peuvent être traités de façon similaire, bien que chaque cas nécessite une adaptation de la méthode utilisée. Dans le cadre de cet article, par manque de place, nous ne traiterons qu'un exemple représentatif, celui du système E :

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = -y + x^2 \\ \dot{z} = 1 - 4x \end{cases} \quad (1)$$

Il possède l'unique point d'équilibre $P_e = (1/4; 1/16; 0)$ qui est un centre de valeurs propres $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = i/2$ et $\lambda_3 = -i/2$.

Le système E est une représentation numérique particulière du système plus général dépendant de cinq paramètres de contrôle réels :

$$\begin{cases} \dot{x} = ayz \\ \dot{y} = by + cx^2 \\ \dot{z} = d + ex \end{cases} \quad (2)$$

Ce dernier est conservatif si $b = 0$ et dissipatif si $b < 0$. Il possède un unique point d'équilibre si $be \neq 0$, ce point est alors $P_e = (-d/e, -cd^2/be^2, 0)$. Si $acd = 0$ ce point n'est pas hyperbolique, ses valeurs propres sont $\lambda_1 = b < 0$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Si $acd \neq 0$ le point est hyperbolique et sa nature dépend du signe du produit $abce$. Si $abce > 0$ c'est-à-dire si $b < 0$ et $ace < 0$ c'est un centre de valeurs propres $\lambda_1 = b < 0$, $\lambda_2 = id\sqrt{ac/be}$ et $\lambda_3 = -id\sqrt{ac/be}$ comme dans le cas du système de Sprott d'origine. Si au contraire $abce < 0$ c'est-à-dire si $b < 0$ et $ace > 0$ il s'agit d'un col de valeurs propres $\lambda_1 = b < 0$, $\lambda_2 = d\sqrt{-ac/be}$ et $\lambda_3 = -d\sqrt{-ac/be}$ avec une variété stable de dimension 2 et une variété instable de dimension 1.

3 conditions nécessaires de chaos

Nous allons dans cette section établir des conditions suffisantes, portant sur les paramètres, pour que le système ne soit pas chaotique.

Théorème 1 : *Si l'un des ses cinq paramètres de contrôle est nul, le système de Sprott E généralisé (2) n'admet pas de solution chaotique.*

Preuve : examinons successivement les cinq cas possibles. Si $a = 0$ alors $\dot{x} = 0$, par conséquent les solutions sont dans le plan $x = cte$ donc elles ne peuvent pas être chaotiques d'après le théorème de Poincaré-Bendixson [9,10]. Si $b = 0$, alors $\dot{y} = cx^2$, par suite soit $y = cte$ si $c = 0$, soit y est monotone si $c \neq 0$, donc admet une limite L lorsque t tend vers $+\infty$. Si cette limite est finie, les solutions sont asymptotiques au plan d'équation $y = L$. Sinon $|y|$ tend vers $+\infty$. Dans tous les cas la solution n'est pas chaotique. On peut donc supposer $b \neq 0$ donc $b < 0$, supposons alors que $c = 0$, c'est-à-dire que $\dot{y} = by$. Par conséquent soit $y = 0$, soit y tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. On conclut comme précédemment. Nous pouvons maintenant supposer $abc \neq 0$ et $d = 0$. Le système (2) devient alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = ayz \\ \dot{y} = by + cx^2 \\ \dot{z} = ex \end{cases} \quad (3)$$

On peut évidemment supposer $e \neq 0$ sinon les solutions sont dans le plan $z = cte$, donc non chaotiques. Supposons $c > 0$, alors d'après la seconde équation de (3) y est croissant tant qu'il demeure négatif. S'il ne prend pas de valeurs positives y tend vers une limite $L \leq 0$, si au contraire il devient positif, il ne peut plus s'annuler et demeure positif pour $t > t_1$. Supposons au contraire $c < 0$, alors y est décroissant tant qu'il demeure positif. S'il ne prend pas de valeurs négatives y tend vers une limite $L \geq 0$, si au contraire il devient négatif, il ne peut plus s'annuler et demeure négatif pour $t > t_2$. On peut donc supposer que y ne s'annule plus pour t plus grand qu'un certain t_0 . La première équation de (3) donne

$$-2ec \frac{x\dot{x}}{y} = -2acexz \quad (4)$$

La seconde équation de (3) implique

$$e \left(\frac{b}{y} + c \frac{x^2}{y^2} \right) \dot{y} = eb^2 + 2bce \frac{x^2}{y} + ec^2 \frac{x^4}{y^2} \quad (5)$$

Enfin la troisième équation de (3) donne

$$2acz\dot{z} = 2acexz \quad (6)$$

En additionnant membre à membre les trois relations (4), (5) et (6) on obtient facilement

$$\dot{F} = e \left(b + c \frac{x^2}{y} \right)^2 \quad (7)$$

où F est la fonction définie pour $t > t_0$ par

$$F(x, y, z) = acz^2 - ec \frac{x^2}{y} + eb \ln |y| \quad (8)$$

cette fonction monotone admet une limite L . De deux choses l'une, soit L est finie par conséquent le comportement est asymptotiquement bidimensionnel défini par $F(x, y, z) = L$. Soit L est infinie et alors soit y tend vers zéro et le comportement asymptotique est dans le plan $y = 0$, soit x ou z tend vers l'infini. Dans les deux cas les solutions sont non chaotiques.

Enfin il reste le cas $e = 0$ c'est-à-dire $\dot{z} = d$. Si $d = 0$ les solutions sont dans le plan $z = cte$, sinon $d \neq 0$ et $|z|$ tend vers $+\infty$, dans les deux éventualités les solutions ne sont pas chaotiques •

Ainsi, nous supposons dans la suite que tous les paramètres du système (2) ne sont pas nuls.

Théorème 2 : *Le système de Sprott E généralisé (2) n'est pas chaotique si son unique point fixe est un col c'est-à-dire si $b < 0$ et $ace > 0$.*

Preuve : la première équation de (2) donne

$$e(2d + 2ex + bz)\dot{x} = 2adeyz + 2ae^2xyz + abeyz^2 \quad (9)$$

La seconde équation de (2) implique évidemment

$$-aez^2\dot{y} = -abeyz^2 - acex^2z^2 \quad (10)$$

Enfin la troisième équation de (2) fournit la relation

$$(bd + bex - 2aezy)\dot{z} = bd^2 + 2bdex + be^2x^2 - 2adeyz - 2ae^2xyz \quad (11)$$

En additionnant membre à membre les trois relations (9), (10) et (11) on obtient

$$\dot{M} = b(d + ex)^2 - acex^2z^2 \quad (12)$$

où M est le polynôme de degré trois

$$M(x, y, z) = 2dex + bdz + e^2x^2 + bexz - aeyz^2 \quad (13)$$

Compte tenu de l'hypothèse faite, on a $\dot{M} \leq 0$ et par conséquent la fonction M est une fonction décroissante du temps qui admet alors admet une limite L . Une fois encore, soit L est finie par conséquent asymptotiquement le comportement est bidimensionnel défini par $M(x, y, z) = L$ et d'après le théorème de Poincaré-Bendixson il n'est pas chaotique. Soit $L = -\infty$ et par conséquent au moins une des trois variables tend vers l'infini ce qui exclut aussi tout comportement chaotique •

4 Les deux formes réduites

Compte tenu des résultats que nous venons d'obtenir, nous pouvons définir dans l'espace de ses paramètres deux zones dans lesquelles le comportement du système (2) est bien distinct. La première est définie par les deux inégalités $b < 0$ et $ace > 0$. On effectue alors les changements d'échelles qui respecte le sens du temps : $x = A\tilde{x}$, $y = B\tilde{y}$, $C\tilde{z}$ et $t = D\tilde{t}$, où les constantes A , B , C et D sont données par :

$$\begin{cases} A = \frac{d}{e} \\ B = \frac{cd^2}{e^2} \left(\frac{e}{acd^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ C = d \left(\frac{e}{acd^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ D = \left(\frac{e}{acd^2} \right)^{\frac{1}{3}} > 0 \end{cases} \quad (14)$$

En revenant aux anciennes notations, c'est-à-dire aux variables sans les tildes, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = -\alpha y + x^2 \\ \dot{z} = 1 + x \end{cases} \quad (15)$$

où α est un paramètre positif. D'après la section précédente, le système (15) n'est pas chaotique car le polynôme M défini par :

$$M(x, y, z) = 2x - \alpha z + x^2 - \alpha xz - yz^2 \quad (16)$$

est une fonction décroissante du temps puisque sa dérivée temporelle est négative :

$$\dot{M} = -x^2z^2 - \alpha(1+x)^2 \quad (17)$$

La Fig. 1 illustre deux exemples de surfaces d'équation $M(x, y, z) = L$ pour deux valeurs opposées de la limite L . Pour $L > 0$ la surface est à une seule nappe, mais pour $L < 0$ elle en possède deux.

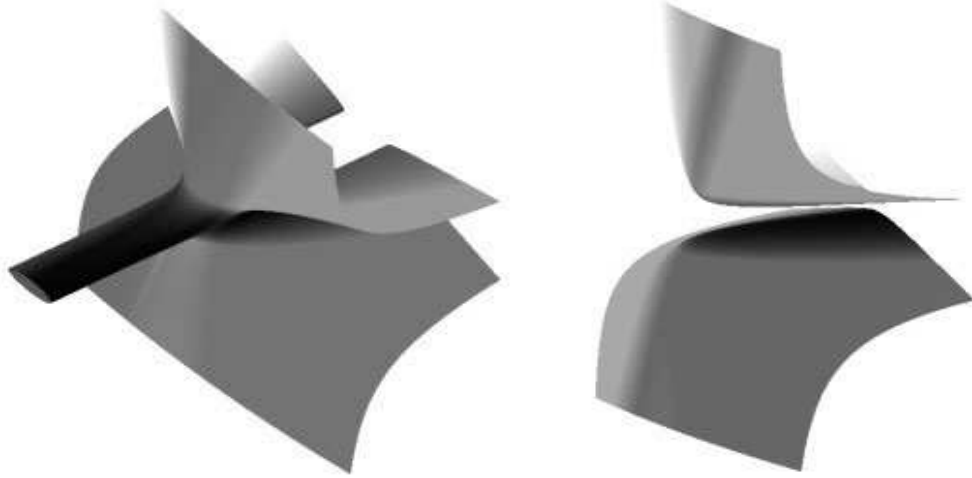
La deuxième zone est définie par les deux inégalités $b < 0$ et $ace < 0$ et on effectue cette fois les changements d'échelles qui respecte encore le sens du temps : $x = A\tilde{x}$, $y = B\tilde{y}$, $C\tilde{z}$ et $t = D\tilde{t}$, avec :

$$\begin{cases} A = -\frac{d}{e} \\ B = \frac{cd^2}{e^2} \left(-\frac{e}{acd^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ C = d \left(-\frac{e}{acd^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ D = \left(-\frac{e}{acd^2} \right)^{\frac{1}{3}} > 0 \end{cases} \quad (18)$$

ce qui donne en revenant aux notations sans les tildes :

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = -\alpha y + x^2 \\ \dot{z} = 1 - x \end{cases} \quad (19)$$

où l'unique paramètre de contrôle du système est α est positif. Bien entendu les conditions permettant l'obtention du système (19), ne sont que des conditions nécessaires pour qu'il puisse admettre des solutions chaotiques. En général ce système n'est pas chaotique pour toutes les valeurs positives de son paramètre



(a) Surface à une nappe pour $L = 10$ (b) Surface à deux nappes pour $L = -10$

Fig. 1. Surface d'équation $M(x, y, z) = L$ pour $\alpha = 1$

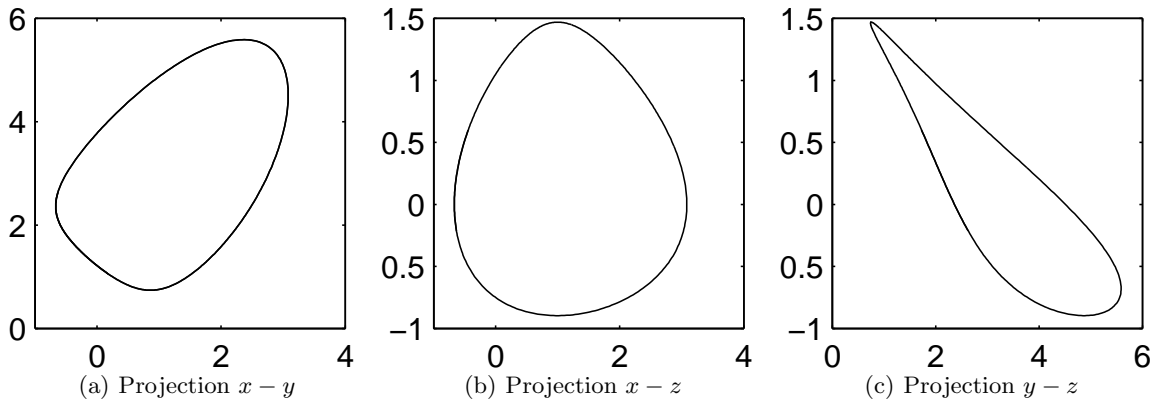


Fig. 2. Cycle limite asymptotiquement stable du système (19) pour $\alpha = 1$.

de contrôle. Illustrons ces propos par deux exemples numériques. Pour $\alpha = 1$, l'attracteur du système est un cycle limite asymptotiquement stable, dont les projections sur les trois plans $x - y$, $x - z$ et $y - z$ sont représentés sur la Fig. 2.

Les paramètres du système de Sprott E (1), vérifient les conditions nécessaires pour que ce système puisse admettre des solutions chaotiques. On vérifie numériquement qu'elles sont suffisantes dans ce cas. En effectuant des changements d'échelles ce système s'écrit sous la forme réduite (19) suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = -4^{\frac{1}{3}}y + x^2 \\ \dot{z} = 1 - x \end{cases} \quad (20)$$

Le système possède alors un attracteur chaotique dont les projections sont représentées sur la Fig. 3.

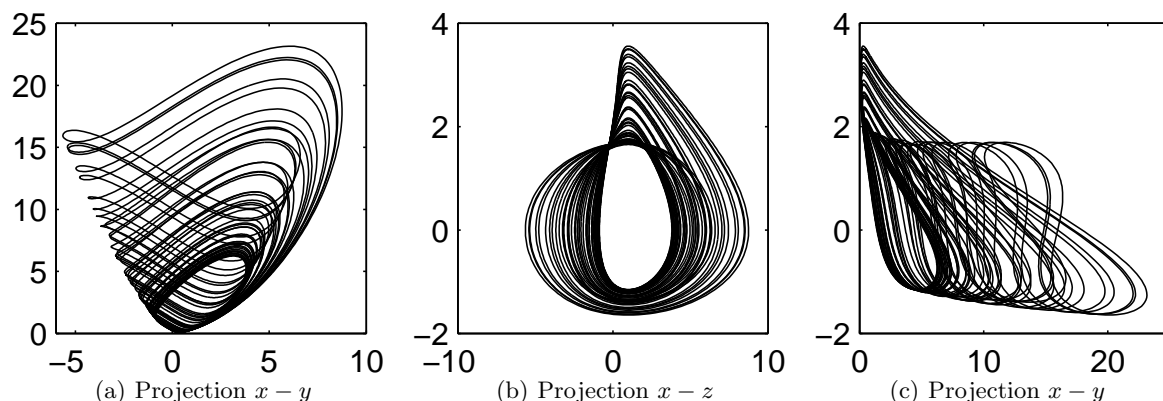


Fig. 3. Attracteur chaotique du système (20).

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons montré, en illustrant nos propos avec l'exemple du système de Sprott E introduit en 1994, comment effectuer une étude analytique rigoureuse de l'espace de ses cinq paramètres de contrôle. Nous avons obtenu une partition de l'espace des paramètres en deux zones de mesure non nulle, dans lesquelles le comportement du système est bien différent. Dans une de ces zones, il n'admet pas de solution chaotique, alors que dans l'autre, il peut éventuellement en avoir.

Les six autres systèmes de Sprott ne possédant qu'un seul point fixe, peuvent être traités de façon analogue au système E. On obtient ainsi pour chaque système des conditions nécessaires pour qu'il puisse posséder des solutions chaotiques. L'utilisation de ces conditions permet de changer l'échelle du temps, en respectant son sens, ainsi que l'échelle de ses trois variables x , y et z . Quatre paramètres prennent les valeurs ± 1 et il reste un ou deux paramètres libres, suivant que le système est constitué de cinq ou six monômes. Le lecteur intéressé trouvera les détails de cette étude dans [11].

Références

1. E.N. LORENZ, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141, (1963).
2. O.E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398, (1976).
3. O.E. RÖSSLER, Continuous chaos - Four prototype equations, *Annals of the New York Academy of Sciences*, **316**, 376-392, (1979).
4. P. COULLET, C. TRESSER & A. ARNEODO, A transition to stochasticity for a class of forced oscillators, *Physics letters A*, **72** (4-5), 268-270, (1979).
5. J.C. SPROTT, Some simple chaotic flows, *Physical Review E*, **50**, R647-R650, (1994).
6. J.-M. MALASOMA, New Lorenz-like chaotic flows with minimal algebraic structure, *Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **1** (2), 1-16, (2008).
7. J.C. SPROTT, Simplest dissipative chaotic flow, *Physics letters A*, **228**, 271-274, (1997).
8. J.-M. MALASOMA, A new class of minimal chaotic flows, *Physics letters A*, **305**, 52-58, (2002).
9. H. POINCARÉ Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **1**, 167-244, (1885).
10. I. BENDIXSON Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Mathematica*, **24**, 1-88, (1901).
11. J.-M. MALASOMA, Necessary conditions for seven Sprott systems to be chaotic, *en préparation*, (2009).