

# Simulation numérique des ondes de Faraday

Nicolas Périnet<sup>1</sup>, Damir Juric<sup>2</sup> & Laurette Tuckerman<sup>1</sup>

<sup>1</sup> PMMH ESPCI, UMR 7636, 10 rue Vauquelin - 75231 PARIS CEDEX 5 - FRANCE

<sup>2</sup> LIMSI-CNRS, UPR 3251, BP 133, Bât 508 - F-91403 ORSAY CEDEX - FRANCE

perinet@pmmh.espci.fr

**Résumé.** Nous avons réalisé une simulation numérique, tridimensionnelle et non linéaire, de l’instabilité de Faraday où deux fluides superposés sont confinés dans un container oscillant verticalement. Ce code utilise une méthode de projection pour la résolution des équations de Navier–Stokes et une méthode de “Front-Tracking” pour la gestion des déplacements de l’interface et le calcul des forces de tensions. La validation de notre code a été effectuée dans le cas linéaire via une comparaison avec les résultats obtenus par une analyse de Floquet. Dans le régime non linéaire, le code a reproduit les motifs hexagonaux observés expérimentalement, ainsi que leurs spectres spatiaux. Enfin, nous avons mis en évidence que les motifs hexagonaux seraient dans ces conditions un point fixe d’une orbite hétérocline.

**Abstract.** We have carried out a three-dimensional and fully nonlinear numerical simulation of the Faraday instability where two superposed fluids are shaken periodically and vertically. The code uses a projection method for the resolution of the Navier–Stokes equations and a Front-Tracking method for the calculation of the interface displacement and interfacial forces. In the linear regime, we compare the instability thresholds and temporal eigenfunctions with those provided by Floquet analysis. In the nonlinear case we compare the spatial spectra of hexagonal patterns with those obtained experimentally. Our results suggest that the hexagonal patterns obtained in those experimental conditions may be fixed points of a heteroclinic orbit.

## 1 Introduction

L’instabilité de Faraday [1] est un modèle macroscopique très étudié dans le but de comprendre la formation primaire des motifs. Ce problème recèle en effet une importante variété de motifs comprenant entre autres des formes périodiques simples et des structures plus singulières telles que les oscillons [2], quasi-cristaux [3] [4] ou super-réseaux qui bénéficient de propriétés de symétrie différentes. Nous nous proposons ici de simuler les ondes de Faraday numériquement en trois dimensions avec un code non linéaire [5] afin de compléter les résultats expérimentaux actuellement connus.

## 2 Cadre physique de l’instabilité de Faraday

Le problème de Faraday consiste à faire osciller verticalement deux fluides distincts superposés dans un récipient. Ces fluides sont idéalement confinés dans un domaine de dimensions horizontales  $x$  et  $y$  infinies et délimité verticalement par deux plaques planes en  $z = 0$  et  $z = h$ . La position en tout point du domaine est repérée par  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . La position de l’interface est décrite séparément par le vecteur  $\mathbf{x}' = (x, y, \zeta(x, y, t))$  où  $\zeta$  correspond à la hauteur locale de l’interface. Dans le référentiel du récipient, les forces qui s’exercent sur les fluides sont la pesanteur, la force fictive des oscillations, les forces visqueuses et les interactions superficielles à l’interface entre les deux couches. Les équations de Navier–Stokes s’écrivent :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho(a \cos(\omega t) - g)\mathbf{e}_z + \nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \int_{S'(t)} \sigma \kappa \mathbf{n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dS \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

Le forçage vertical est représenté par un terme périodique d’amplitude  $a$  et de fréquence  $\omega$ . La force de tension superficielle est exprimée par le terme intégral où  $\sigma$  est la tension superficielle,  $\kappa$  la courbure de l’interface et  $\mathbf{n}$  son vecteur normal.

Le choix de fluides visqueux impose la nécessité de conditions aux limites d’adhérence aux parois qui délimitent verticalement le domaine. Dans le référentiel du récipient, elles se simplifient en

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}(x, y, h) = 0 \quad (3)$$

### 3 Méthodes numériques employées et validations du code

#### 3.1 Méthodes numériques

On utilise une approche de fluide simple : les deux fluides sont traités simultanément et différenciés par une fonction indicatrice, par exemple une fonction de Heaviside  $H[z - \zeta(x, y, t)]$  changeant de valeur à l’interface. Afin d’éviter des problèmes numériques liés aux discontinuités à l’interface, nous lisons  $H$  par une fonction de Peskin [6]. Les champs caractérisant les fluides et leur dynamique sont calculés sur un maillage Eulérien décalé alors que l’interface est modélisée sur un maillage Lagrangien et triangulaire.

Le code est décomposé en trois parties répétées en boucle. La première, consistant à calculer les forces de tension superficielle localisées sur l’interface, repose sur une méthode de “Front-Tracking” [7]. Ensuite, les équations de Navier–Stokes (1,2) sont discrétisées par des schémas aux différences finies semi-implicites. Le système (1-3) est résolu à l’aide d’une méthode de projection avec correction incrémentale de la pression [8] [9] [10]. Enfin, le “Front-Tracking” est réemployé pour advecter l’interface et les caractéristiques des fluides sont actualisées sur les noeuds du maillage Eulérien. Le domaine horizontalement infini a été remplacé par une boîte parallélépipédique dont les dimensions horizontales dépendent de  $k$  et des symétries des motifs attendus. On impose aux parois verticales de la boîte des conditions aux limites périodiques. Cette définition du domaine infini restreint drastiquement l’ensemble des solutions possibles.

#### 3.2 Validations

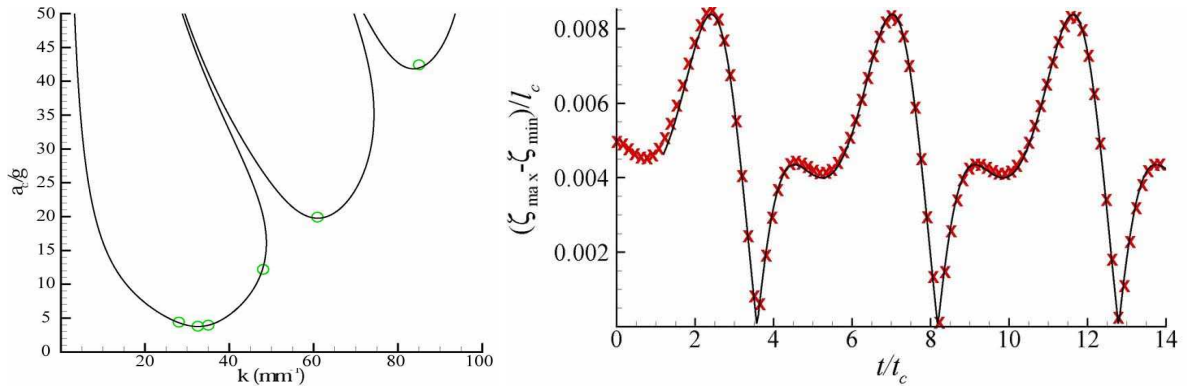
Pour une perturbation de nombre d’onde  $k$  et de faible amplitude, l’instabilité de Faraday est décrite par un système d’équations aux dérivées partielles contenant au second membre un terme dépendant périodiquement du temps. Ce type de problème, dit de Floquet, a une solution qui s’écrit :

$$\zeta(x, y, t) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + (\lambda + i\alpha\omega)t} \hat{\zeta}(k, t \bmod T) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + (\lambda + i\alpha\omega)t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\zeta}_n(k) e^{in\omega t} \quad (4)$$

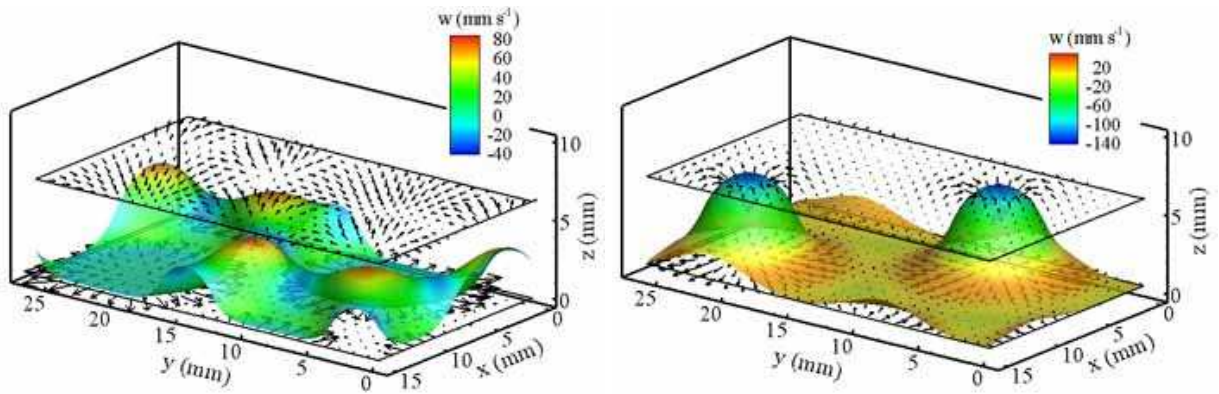
où  $T = 2\pi/\omega$ ,  $\lambda \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in [0, 1[$ , et  $\hat{\zeta}(k, t)$  est la transformée de Fourier spatiale de la hauteur d’interface  $\zeta(x, y, t)$ .  $\lambda$  est le taux de croissance de la solution et  $\mathbf{k}$  un vecteur d’onde horizontal. L’amplitude critique  $a_c(k)$  des oscillations correspond à un taux de croissance  $\lambda = 0$  ;  $c$  est le seuil d’instabilité.

Généralement, les modes de Floquet  $\hat{\zeta}(k, t \bmod T)$  ne sont pas trigonométriques mais ont la fréquence fondamentale  $\omega$ . Nous avons comparé dans figure 1 les seuils d’instabilité et les modes de Floquet obtenus à l’aide de nos simulations avec ceux calculés théoriquement par Kumar & Tuckerman [11]. Pour cela nous sommes partis d’une perturbation de l’interface, spatialement monochromatique, à laquelle nous avons appliqué le code décrit précédemment.

Au-dessus du seuil d’instabilité, la perturbation modifie son apparence spatiale du fait des interactions non linéaires pour former des motifs. Des exemples de motifs hexagonaux sont montrés dans figure 2. Une expérience récente de Kityk *et al.* [12] a fourni les premiers résultats quantitatifs sur des motifs carrés et hexagonaux. En effet, ils sont parvenus à en extraire le spectre spatial et le spectre temporel de l’évolution des principaux modes de Fourier. Nous avons explicité dans figure 3 la distribution des modes excitable dans le domaine dédié à nos simulations d’hexagones. Nous montrons dans figure 4 une comparaison des spectres des hexagones obtenus expérimentalement avec ceux de notre simulation reprenant le même jeu de paramètres physiques, à partir d’une interface plane faiblement perturbée par



**Fig. 1.** A gauche : exemple de courbe neutre  $a_c(k)$ . La ligne continue et les cercles symbolisent respectivement la courbe neutre théorique et certaines amplitudes critiques simulées. A droite : évolution de la hauteur d'interface au cours du temps. La ligne continue et les croix représentent respectivement les modes propres du problème de Floquet et la différence  $\Delta\zeta(t) = \zeta_{max} - \zeta_{min}$ . Ces derniers représentent la même quantité.



**Fig. 2.** Motifs hexagonaux. Résolution : 180 points en  $z$ , 50 points par longueur d'onde en  $x$  et  $y$ . L'interface est colorée selon sa hauteur  $\zeta(x, y, t)$ . Nous avons tracé les vecteurs vitesses sur des plans horizontaux de part et d'autre de l'interface.

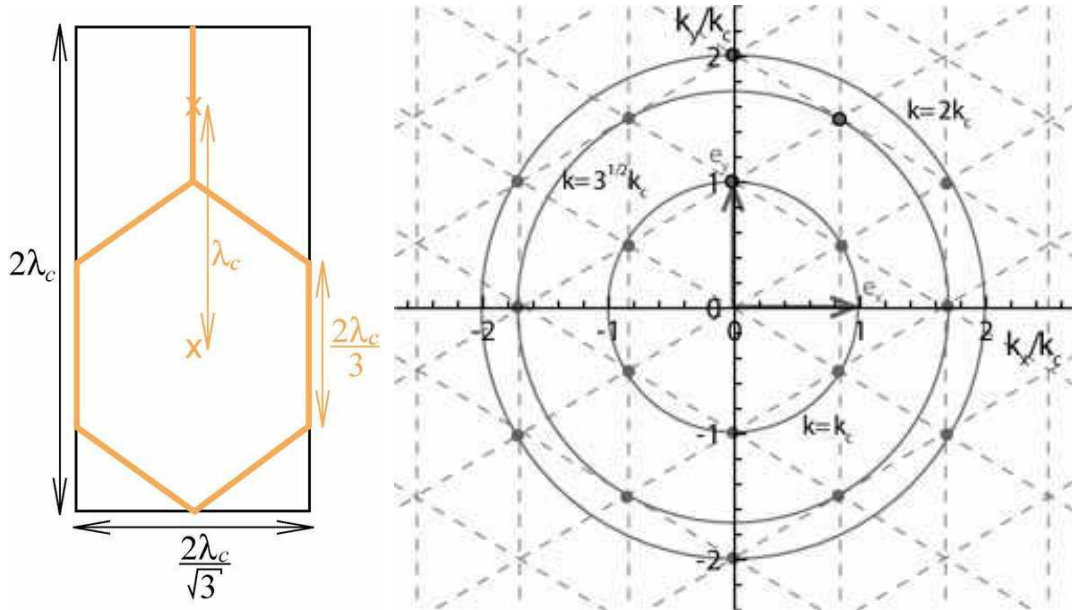
un bruit blanc.

Le code réalisé a passé avec succès des tests variés et contraignants dans les deux régimes connus. Sa fiabilité a donc été certifiée.

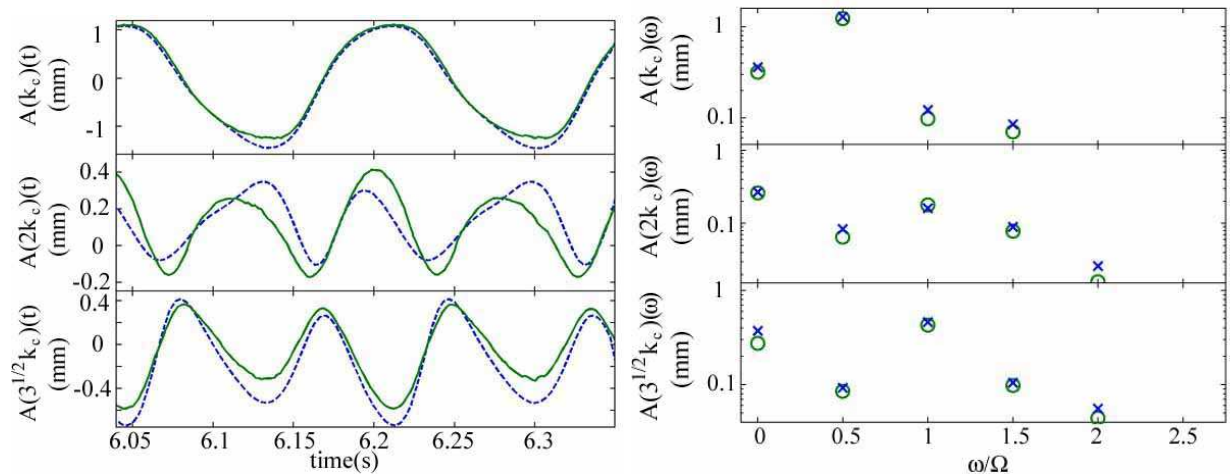
#### 4 Comportement des hexagones aux temps longs

Les motifs hexagonaux obtenus avec les conditions de Kityk *et al.* semblent ne pas durer indéfiniment. Dans nos simulations et pour différentes résolutions, les hexagones disparaissent au bout de quelques secondes au profit de motifs aux symétries différentes. Les expériences confirment ces observations [13] bien que la durée de maintien des hexagones ne soit pas identique.

Une décomposition spectrale dédiée au suivi des modes de nombre d'onde  $k_c$  et de ses principaux produits par interaction non linéaire a été effectuée dans figure 5 (droite). On y constate que tous les modes associés à un même nombre d'onde ne suivent pas exactement la même évolution. Les modes de nombre d'onde  $k_c$  qui sont prépondérants sont initialement de même amplitude. Il en est de même des autres modes représentés. Pendant cette phase, la symétrie par rotation de  $n\pi/3$  est vérifiée ; le motif est hexagonal. Après quelques secondes, seul le mode  $k_c \mathbf{e}_y$  conserve sa dynamique de départ. Ses deux

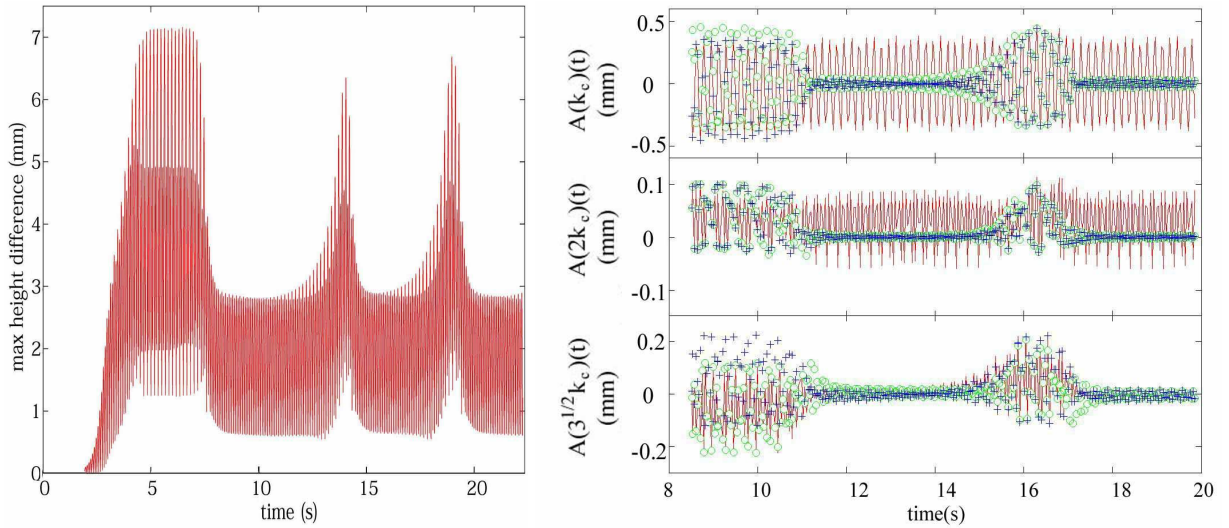


**Fig. 3.** A gauche : forme de la boîte pour nos simulations d’hexagones.  $\lambda_c = 2\pi/k_c$  est la longueur d’onde critique. A droite : Répartition des modes de Fourier permis par les dimensions de cette boîte (intersections des triangles pointillés). Les études de spectres (figure 4) portent sur les trois plus petits nombres d’onde autorisés :  $k = k_c$ ,  $k = 2k_c$ , et  $k = 3^{1/2}k_c$ . Tous les modes de même nombre d’onde sont disposés sur un cercle gris centré en l’origine et doivent avoir le même comportement pour que la symétrie du motif soit hexagonale.

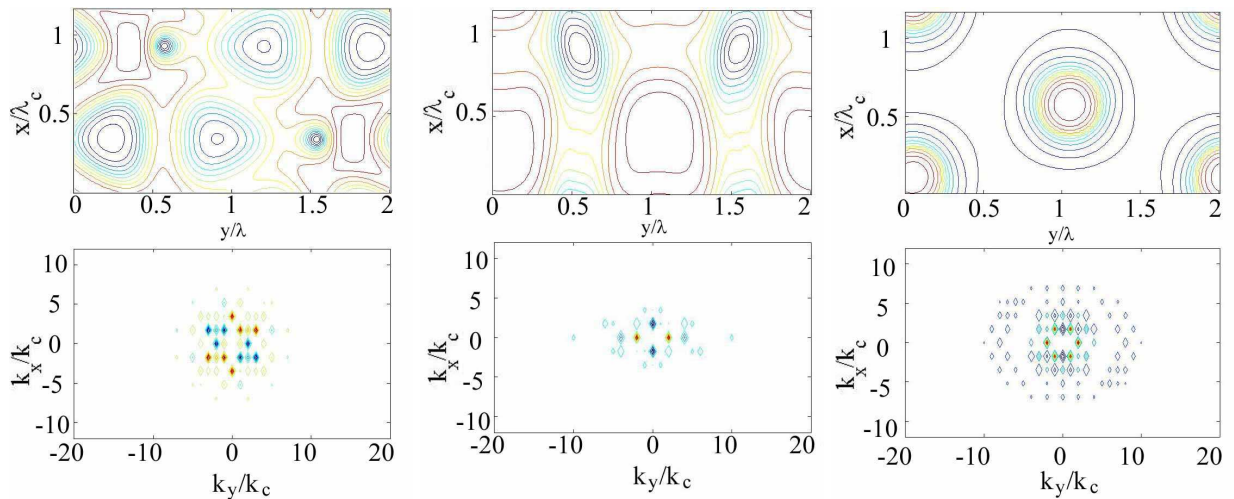


**Fig. 4.** A gauche : Evolution temporelle des modes principaux d’un motif hexagonal (cercles noirs sur figure 3). Traits continus : résultats expérimentaux. Pointillés : simulations. A droite : spectre temporel de la figure de gauche. Cercles : résultats expérimentaux. Croix : simulations.

homologues (représentés sur le même graphe) sont amortis et se stabilisent à une moindre amplitude pendant quelques secondes. La symétrie hexagonale est donc brisée et l’on s’attend à ce que le motif, du fait de la dominance d’un seul mode, s’approche d’une structure de bandes imparfaite. C’est ce que montrent les deux graphes de gauche de figure 6 dont la complexité des motifs est intimement liée à la richesse du spectre spatial. Les modes de nombre d’onde  $2k_c$  suivent plus ou moins la même dynamique : seul  $2k_c e_y$  conserve son amplitude initiale car il provient principalement de l’interaction de



**Fig. 5.** A gauche : Historique de  $\Delta\zeta(t)$  depuis la phase de croissance linéaire. Même résolution que pour figure 2. Le palier d'amplitude maximale correspond au régime hexagonal. A droite : Evolution d'une partie des modes spatiaux de l'interface. Suivi des trois modes  $k_c\mathbf{e}_y$ ,  $2k_c\mathbf{e}_y$ ,  $(\sqrt{3}k_c\mathbf{e}_x + 3k_c\mathbf{e}_y)/2$  (courbes en traits pleins) et de leurs images par rotation de  $\pi/3$  (cercles) et  $2\pi/3$  (plus). Les deux figures proviennent de simulations différentes.



**Fig. 6.** Exemples de motifs rencontrés après disparition des hexagones. En haut, courbes de niveau  $\zeta(x, y, t)$ . En bas, spectre spatial de  $\zeta$ .

$k_c\mathbf{e}_y$  avec lui même, les deux autres s'amortissent selon le même schéma que pour  $k_c$ . Enfin, tous les modes correspondant à  $\sqrt{3}k_c$  s'amortissent. En effet, aucun d'eux n'est combinaison linéaire de  $k_c\mathbf{e}_y$  et  $2k_c\mathbf{e}_y$ , seuls modes ayant gardé leur amplitude initiale. La synchronicité de ces changements provient des interactions triadiques entre modes. Figure 5 (gauche) révèle ensuite la présence d'un pic d'amplitude de  $\Delta\zeta$ , corrélée à une nouvelle amplification des modes préalablement affaiblis (droite). Les motifs formés se rapprochent à nouveau des hexagones même s'ils exhibent seulement une invariance par rotation de  $2n\pi/3$  (voir figure 6 à droite). Ces motifs ne persistent pas mais réapparaissent de manière sporadique, simultanément aux pics d'amplitude. En effet, l'occurrence des triangles, comme ceux tracés dans figure 6, a été constatée uniquement lors de l'émergence de ces pics. Ces allées et venues successives autour du

régime hexagonal mettent en évidence que cet état est un point fixe du problème de Faraday, situé sur une orbite hétérocline.

## 5 Conclusion

Un code tridimensionnel non linéaire simulant les instabilités de Faraday a été réalisé. Les divers tests qu'a subi ce code en régime linéaire et à saturation assurent sa fiabilité pour simuler les motifs. Nous avons ici mis en évidence que, dans un cas particulier [12], les hexagones appartiennent à une orbite hétérocline de l'espace des motifs excitables. Il nous faut maintenant prouver cette assertion par une analyse de stabilité linéaire autour de cet état calculé numériquement et déterminer quels sont les vecteurs propres instables au voisinage de ce point fixe.

## Références

1. M. FARADAY, On a peculiar class of acoustical figures ; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **121**, 299-340 (1831).
2. O. LIOUBASHEVSKI, H. ARBELL & J. FINEBERG, Dissipative solitary states in driven surface waves, *Physical Review Letters*, **76**, 3959-3962 (1996).
3. B. CHRISTIANSEN, P. ALSTRØM & M. T. LEVINSEN, Ordered Capillary-Wave States : Quasicrystals, Hexagons, and Radial Waves, *Physical Review Letters*, **68**, 2157-2161 (1992).
4. W. S. EDWARDS & S. FAUVE, Parametrically excited quasicrystalline surface waves, *Physical Review E*, **47**, R788-R791 (1993).
5. N. PÉRINET, D. JURIC & L. S. TUCKERMAN, Numerical simulation of Faraday waves, [arXiv : 0901.0464](https://arxiv.org/abs/0901.0464), soumis à *Journal of Fluid Mechanics*.
6. C. S. PESKIN, Numerical analysis of blood flow in the heart, *Journal Comput. Physics*, **25**, 220-252 (1977).
7. G. TRYGGVASON, B. BUNNER, A. ESMAEELI, D. JURIC, N. AL-RAWAHI, W. TAUBER, J. HAN & Y.-J. JAN, A Front-Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow, *Journal of Comput. Physics*, **169**, 708-759 (2001).
8. A. J. CHORIN, Numerical simulation of the Navier-Stokes equations, *Math. Comput.*, **22**, 745-762 (1968).
9. R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam (1984).
10. K. GODA, A multistep technic with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows, *J. Comput. Phys.*, **30**, 76-95 (1979).
11. K. KUMAR & L. S. TUCKERMAN, Parametric instability of the interface between two fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, **279**, 49-68 (1994).
12. A. V. KITZYK, J. EMBS, V.V. MENKHONOSHIN & C. WAGNER, Spatiotemporal characterization of interfacial Faraday waves by means of a light absorption technique, *Physical Review E*, **72**, 036209 (2005).
13. A. KITZYK & C. WAGNER, *Communication personnelle* (2008).