

Les singularités du chaos : doubles plis et fronces dans des systèmes couplés simples

Jérémy Oden, Serge Bielawski, & Marc Lefranc

Laboratoire PhLAM, UMR CNRS 8523, Université de Lille 1, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.
marc.lefranc@univ-lille1.fr

Déterministe mais imprédictible, une dynamique chaotique s'explique par l'action conjointe dans l'espace des phases de deux mécanismes géométriques complémentaires : étirement et repliement [1,2]. L'étirement sépare inexorablement des trajectoires voisines suivant la direction instable, rendant l'évolution imprédictible, tandis que le repliement rapproche suivant la direction stable des états initialement éloignés, permettant ainsi de maintenir la dynamique dans une région finie de l'espace des états. Au fil du temps, ce processus de contraction induit une perte de mémoire sur les conditions initiales et par là une irréversibilité. Cela suggère que la dynamique asymptotique d'un système chaotique peut être caractérisée en termes de *singularités*, ou *catastrophes* [2], qui sont les outils mathématiques adaptés pour caractériser la non-inversibilité d'applications différentiables [3]. Cette idée devient naturelle lorsqu'on considère que la dynamique dans l'espace des phases induit une dynamique singulière dans la surface invariante qu'est la variété instable, en la repliant indéfiniment sur elle-même [2].

Lorsqu'un attracteur chaotique possède une seule direction instable, les singularités rencontrées sont alors du type le plus simple, le *pli*. C'est cette singularité qui est à l'origine du comportement chaotique d'applications d'un intervalle dans lui-même telles que la célèbre suite logistique. Dans le cas des systèmes hyperchaotiques, qui présentent deux directions instables, il faut alors considérer les applications singulières d'une surface dans elle-même [2]. De manière générique, on doit alors observer des singularités d'ordre supérieur, à savoir des *fronces*, localisées à l'intersection de lignes de plis [3].

Afin de mettre clairement en évidence la présence de singularités fronces dans des systèmes hyperchaotiques, nous nous sommes intéressés à des systèmes obtenus en couplant faiblement deux systèmes fortement dissipatifs à une seule direction instable. En deça de la synchronisation, les deux directions instables sont préservées et les modifications de leurs structures peuvent être analysées.

Nous avons tout d'abord étudié le couplage de deux suites logistiques, associées chacune à une singularité de type pli. De manière remarquable, on montre facilement que le double pli laisse la place à une fronce pour un couplage arbitrairement petit, ce qui illustre la stabilité structurelle de cette singularité dans un système hyperchaotique. Afin de démontrer la pertinence expérimentale de ce phénomène, nous avons ensuite couplé deux résonateurs à diode [4,5] par une liaison capacitive extrêmement faible. Une section de Poincaré du système couplé met clairement en évidence une fronce semblable à celle observée pour la double suite logistique couplée. Enfin, des simulations numériques de deux systèmes de Rössler couplés donnent des résultats tout à fait similaires. Ces résultats constituent une première étape vers une classification topologique des systèmes chaotiques en termes de singularités [2].

Références

1. E. OTT, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
2. R. GILMORE AND M. LEFRANC, *The Topology of Chaos* (Wiley, New York, 2002).
3. V. ARNOLD, A. VARCHENKO, AND S. M GUSEIN-ZADE, *Singularités des applications différentiables* (Edition Mir, Moscou, 1986). R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse* (InterÉditions, Paris, 1972).
4. P. LINSAY, Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1349–52 (1981). J. TESTA, J. PEREZ AND C. JEFFRIES, Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 714–717 (1982)
5. R. VAN BUSKIRK AND C. JEFFRIES, Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators, *Phys. Rev. A* **31**, 3332–3357 (1985)