

# Étude des bifurcations d'un circuit RLC non linéaire

Mohamed Hédi Amri

CEREP (Centre de Recherche en Productique), Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis, Tunisie  
 mohamed.amri@gmail.com

**Résumé.** Il s'agit d'étudier les phénomènes de bifurcations des solutions périodiques d'un circuit RLC non linéaire en faisant varier l'une des conditions initiales. Ce travail fournit une classification basée sur l'analyse du spectre et la section de Poincaré.

**Abstract.** It is about studying the bifurcation of a nonlinear dynamical system's periodic solutions while making vary one of the initial conditions. This work provides a classification based on the spectral analysis and Poincaré map.

## 1 Introduction

Le circuit RLC série à inductance saturable est le siège d'une panoplie de réponses allant du synchronisme au chaotique [1]. La variation de l'un des paramètres du circuit ou des conditions initiales peut être à l'origine d'un changement qualitatif du comportement de celui-ci. Ce changement pouvant affecter le nombre, le type et la stabilité des réponses n'est autre que le phénomène de *bifurcation* [2]. Dans cet article l'intérêt est porté à l'étude des bifurcations d'un circuit RLC série non linéaire qui, par le choix adéquat des conditions initiales, présente des anomalies de fonctionnement [3]. L'approche, adoptée pour cette étude, est basée sur l'utilisation de la section de Poincaré qui a pour but de diminuer d'une unité la dimension du problème à étudier.

## 2 Approche utilisée

### 2.1 Equations différentielles paramétrées

Soit le système dynamique paramétré non autonome suivant :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \lambda, t) \quad (1)$$

où :

- $X$  : est le vecteur dont les composantes sont les variables d'état,
- $\lambda$  : est le vecteur contenant les paramètres,
- $t$  : le temps,
- $F$  : est une fonction dépendante explicitement du temps.

Une solution du système (1) est notée  $x(\lambda)$ . L'ensemble des solutions  $x(\lambda)$ , pour  $\lambda$  décrivant  $\mathbb{R}^p$ , est appelé branche de solutions. La caractéristique principale de tels systèmes non linéaires est la grande sensibilité du comportement de ses solutions aux valeurs prises par le vecteur paramètre  $\lambda$ . En effet, une variation de  $\lambda$  peut faire passer une des grandeurs caractéristiques par une valeur critique provoquant un changement qualitatif du comportement de la solution. On dit alors que l'ensemble de solutions subit une bifurcation et le paramètre qui a causé cette modification est appelé paramètre de bifurcation [4,5].

## 2.2 La section de Poincaré

La notion de surface de section de Poincaré est utilisée lors de l'étude d'une équation différentielle. Il s'agit d'une surface de l'espace de phase choisie de telle façon qu'elle soit transverse aux trajectoires solutions du système étudié. La discrétisation ainsi réalisée permet d'associer au système différentiel considéré une transformation ponctuelle  $T_\lambda$  souvent appelée *transformation de Poincaré*.

Dans le cas d'une équation différentielle non autonome d'ordre 2, la transformation de Poincaré est générée en échantillonnant la réponse du système aux instants  $t = kT$ ,  $T$  étant la période du signal d'excitation et  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . La suite des points  $X_0, X_1, \dots, X_n$  ainsi construite constitue une trajectoire discrète dans le plan de phase discret  $(x_n, y_n)$ . Dans le cas typique où la solution est de période 1, l'image stroboscopique montre un seul point, par contre dans le cas d'une solution multipériodique, on aboutit à plusieurs points.

## 3 Circuit d'étude

Le système non linéaire d'étude est un circuit RLC série comportant, montées en série et alimentées sous une tension sinusoïdale, une résistance, une capacité et une inductance à noyau de fer saturable (Fig. 1). Ce circuit est régi par une équation différentielle non autonome d'ordre 2. La caractéristique

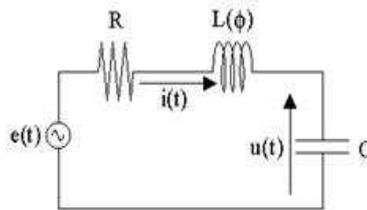


Fig. 1. Circuit RLC série.

(flux, courant) de l'inductance non linéaire est une non linéarité que nous approximations par une fonction cubique. Un tel système est décrit par :

$$Ri + \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) = e(t) \quad (2)$$

où :

- $e(t)$  : une excitation sinusoïdale (en Volts) de pulsation  $\omega$ ,  $e(t) = E_m \sin(\omega \cdot t)$ ,
- $i(t)$  : le courant dans le circuit, en Ampères,
- $\Phi(t)$ , le flux dans l'inductance à l'instant  $t$ , en Webers.

En posant :  $x(t) = \phi(t)$  et  $y(t) = u(t)$ , il vient le système différentiel suivant qui modélise le circuit RLC considéré :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = E_m \sin(\omega t) - R(ax + bx^3) - y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{C}(ax + bx^3). \end{cases} \quad (3)$$

## 4 Phénomènes de bifurcation et résultats de simulation

### 4.1 Bifurcation pli

Cette bifurcation est schématisée comme suit :

$$\emptyset \Leftrightarrow \text{cycle}(a, k) + \text{cycle}(r, k)$$

où le cycle  $(a, k)$  (respectivement le cycle  $(r, k)$ ) est associé à une solution périodique stable (respectivement instable) de période  $k\tau$  et où  $\emptyset$  signifie l'inexistence des deux cycles avant le point de bifurcation.

Une bifurcation pli provoque l'apparition ou la disparition de deux cycles de même ordre et de stabilités différentes, suite à la variation de l'un des paramètres du circuit  $\lambda = (E_m, \omega)$ . En faisant varier le paramètre  $E_m$  de façon croissante au point a,  $\omega$  restant constant, une variation brusque a eu lieu, saut, donnant naissance à une autre forme de trajectoire différente, point b. Partant de cette dernière trajectoire et diminuant  $E_m$ , au point c, on obtient le même phénomène de saut qui conduit à une solution différente, point d. Les points a et c correspondent à des points de bifurcation nœud-col. La figure 4 montre la succession de deux bifurcations de type pli formant ainsi une structure en lèvres.

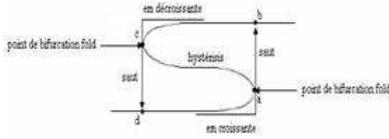


Fig. 2. Structure en lèvres.

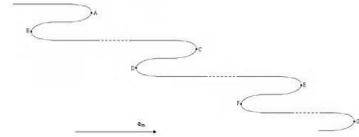


Fig. 3. Succession des points de bifurcation pli.

Les points de bifurcation sont donnés Tab. 1. La succession de ces points de bifurcation pli donne la structure de la Fig. 3. Les caractéristiques du circuit étudié aux points de bifurcation pli sont données Figs. 4.

Tab.1. Les points de bifurcation pli.

| Point de bifurcation pli | $e_m$   | $x_0$     | $y_0$     |
|--------------------------|---------|-----------|-----------|
| A                        | 48.92   | 0.260520  | 1.021510  |
| B                        | 22.67   | 0.011060  | 27.716600 |
| C                        | 129.72  | 0.102249  | 43.000380 |
| D                        | 112.96  | 0.048195  | 1.231538  |
| E                        | 304.35  | -0.024320 | -7.831981 |
| F                        | 224.449 | 0.408210  | -4.186064 |
| G                        | 475.72  | 0.290116  | -107.814  |

On remarque que ces solutions correspondent à des cycles de période 1 vu que la section de Poincaré se réduit à un seul point et le spectre d'amplitude est formé d'un fondamental et de ses surharmoniques.

## 4.2 Bifurcation par doublement de période

Cette bifurcation est schématisée comme suit :

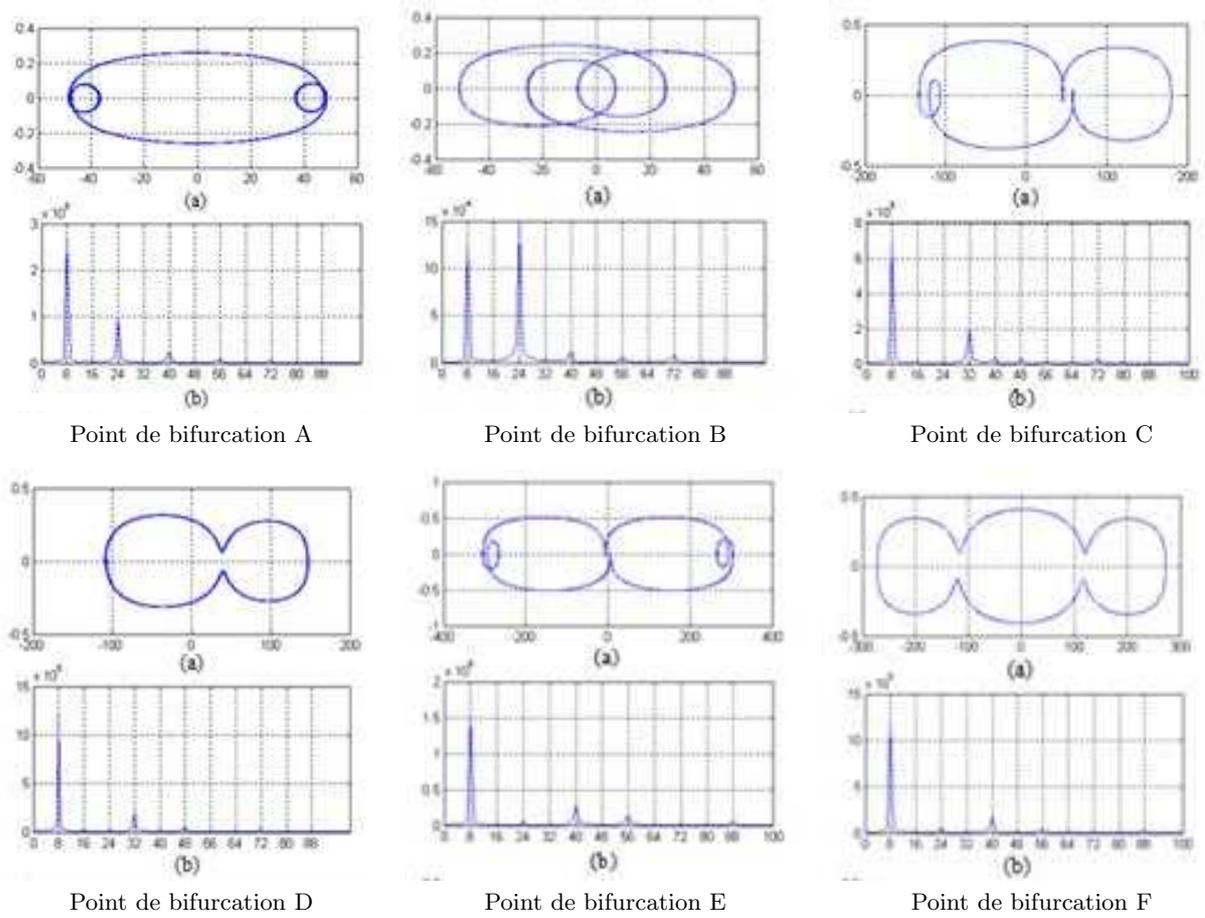
$$\text{cycle}(a, k) \Leftrightarrow \text{cycle}(a, 2 \cdot k) + \text{cycle}(r, k).$$

La succession de ce type de bifurcations de doublement de période conduit à la cascade de Myrberg — ou cascade de doublements de période — (Fig. 5) schématisée par :

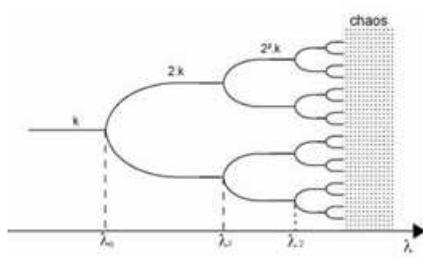
$$\text{cycle}(a, 2^i \cdot k) \Leftrightarrow \text{cycle}(a, 2^{i+1} \cdot k) + \text{cycle}(r, 2^i \cdot k)$$

Lorsque  $i$  tend vers l'infini, un chaos stable, ou instable, pouvant être observé.

La variation de  $e_m$  permet de mettre en évidence des solutions périodiques dont la période double lorsqu'on continue la variation de ce paramètre. Ces phénomènes de doublement de période apparaissent pour des valeurs rapprochées. L'augmentation de la valeur d'amplitude de l'excitation conduit à deux



**Fig. 4.** Les caractéristiques des signaux des tensions et flux aux différents points de bifurcation pli. (a) Espace d'état et (b) Spectre d'amplitude.

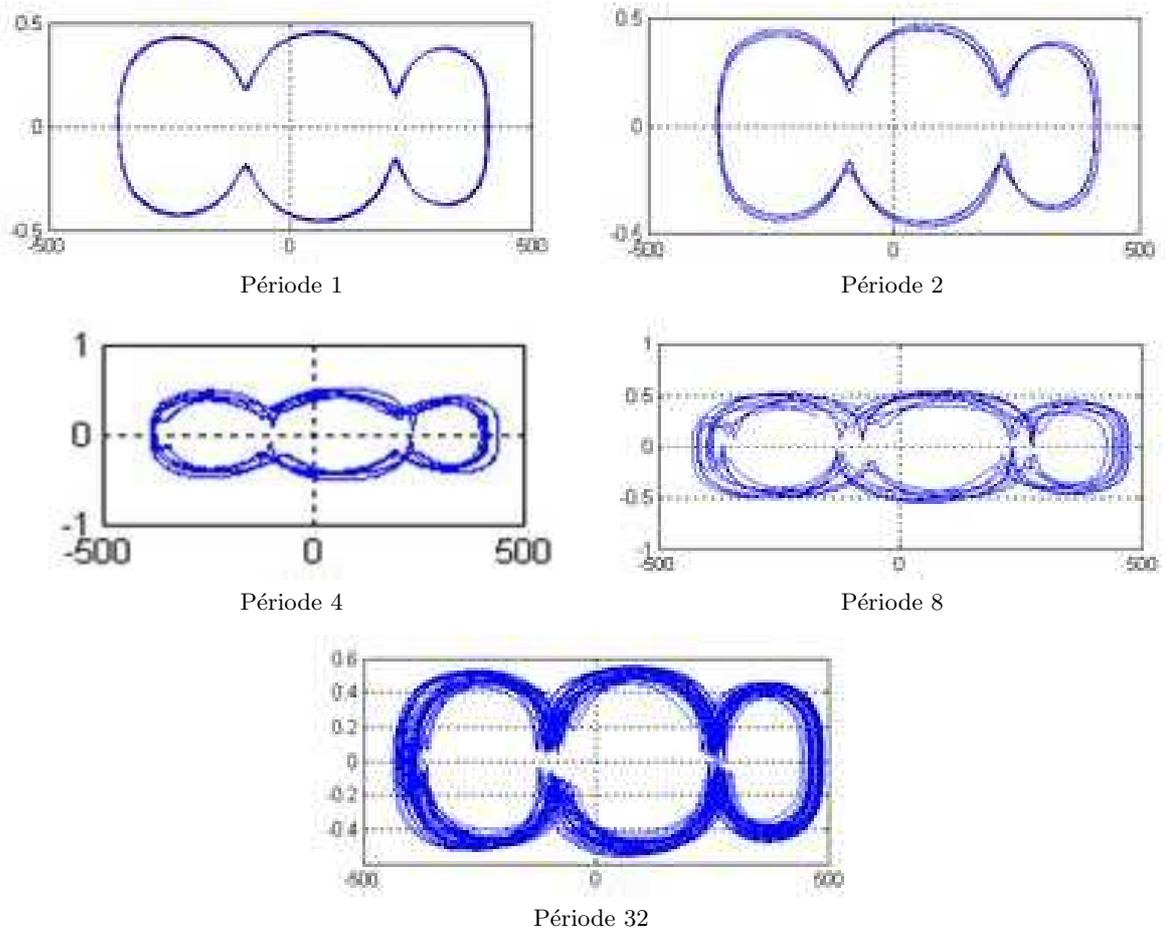


**Fig. 5.** Cascade de Myrberg.

points de bifurcation de type doublement de période du cycle de période 1. Un cycle de période  $2^m$  étant associé à une solution sous-harmonique de pulsation  $\frac{\omega}{2^m}$ , la succession des bifurcations de doublement de période qui apparaissent pour des valeurs du paramètre  $e_m$  de plus en plus rapprochées peut conduire à un comportement chaotique [6]. Les points  $C_n$  des cycles de période  $n$  sont donnés Tab. 2. Les caractéristiques des points cycles de période  $n$  sont données Fig. 6.

**Tab.2.** Les points de bifurcation par doublement de période.

| Point de bifurcation par doublement de période | $e_m$    | $x_0$     | $y_0$      |
|--|----------|-----------|------------|
| $C_1$  | 356.91   | 0.341621  | -49.344575 |
| $C_2$  | 443.75   | 0.223679  | -77.406437 |
| $C_4$  | 369.0656 | 0.3209686 | -55.405785 |
| $C_8$  | 395.72   | 0.279808  | -64.260599 |
| $C_{32}$                                       | 402.508  | 0.270258  | -66.028420 |

**Fig. 6.** Caractéristiques des signaux des tensions et flux en différents points.

## 5 Conclusion

L'étude de l'équation différentielle régissant le comportement du circuit RLC à inductance saturable a permis de mettre en évidence la diversité et la non unicité des réponses de celui-ci. Dans cet article une diversité de phénomènes de bifurcations a été élaborée en utilisant les sections de Poincaré.

## Références

1. M. AMRI & M. BENREJEB, Modélisation par approche neuronale des anomalies de fonctionnement d'un circuit RLC non linéaire, *JTEA '06 Hammamet* (2006).
2. H. KHAMMARI, *Sur le comportement complexe des oscillations forcées des systèmes non linéaires soumis à une excitation sinusoïdale*, Thèse de Doctorat, E.N.I.T, Tunis (1999).
3. M. BENREJEB, *Synchronisation des systèmes continus non linéaires en régime forcé*, Thèse de Doctorat Ingénieur, Lille, (1976).
4. J. KRISHNAIAH, C. S. KUMAR & M. A. FARUQI, Modelling and control of chaotic processes through their bifurcation diagrams generated with the help of recurrent neural network models : Part 1 simulation studies, *Journal of Process Control*, **16**, 53-66 (2006).
5. H. KHAMMARI, J. P. CARCASSES & M. BENREJEB, Sur une structure particulière de bifurcations des solutions périodiques d'un circuit RLC série, *JTEA Hammamet*, pp. 224-231 (1997).
6. B. CANNAS, S. CINCOTTI, M. MARCHESI & F. PILO, Learning of Chua's circuit attractors by locally recurrent neural networks, *Chaos, Solitons & Fractals*, **12**, 2109-2115 (2001).