

# Bifurcations dans l'espace hyperbolique en relation avec un modèle de perception des structures visuelles par le cortex

Pascal Chossat<sup>1</sup> & Olivier Faugeras<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire J-A Dieudonné, UMR CNRS 6618, UNSA, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02

<sup>2</sup> Laboratoire NeuroMathComp, INRIA/ENS Paris/CNRS, 2004 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France

pascal.chossat@unice.fr

**Résumé.** Il est expérimentalement établi qu'une correspondance existe entre la localisation de petites portions d'image dans le champ visuel et de petits domaines (de l'ordre de  $1 \text{ mm}^2$  chez les primates) à la surface de l'aire nommée V1 dans le cortex visuel. Ces petites portions du cortex visuel sont nommées hypercolonnes. Elles sont composées d'un ensemble de neurones interconnectés (quelques dizaines de milliers). Ces neurones réagissent sélectivement aux propriétés géométriques de l'image locale correspondant à l'hypercolonne : contours, texture, contraste, etc. Nous proposons un modèle fonctionnel de ces hypercolonnes basé sur la notion de tenseur de structure, bien connu dans le traitement d'image. Ceci revient à supposer que le potentiel de membrane moyenné  $V$  dans chaque hypercolonne est fonction du tenseur de structure (et du temps). De façon naturelle les équations pour  $V$ , du type Wilson-Cowan (donc non linéaires), sont invariantes par le groupe des isométries de l'espace  $H$  des tenseurs de structure qui se trouve être un espace hyperbolique. Une activité spontanée de l'hypercolonne sera observable si ces équations présentent une bifurcation à partir de l'état de repos. Ceci se traduira par l'apparition de motifs résultant de la brisure spontanée de l'invariance par le groupe des isométries de  $H$ . L'intérêt de cette observation est qu'elle est susceptible de vérification expérimentale. Cependant la bifurcation de structures dans l'espace hyperbolique (ou dans le plan hyperbolique pour simplifier un peu), est un problème très complexe pour lequel nous n'avons obtenu à ce jour que des résultats préliminaires.

**Abstract.** It has been experimentally observed that a correspondence exists between localized areas in the visual field and small areas (about  $1 \text{ mm}^2$  in primates) on the surface of the visual cortex. These areas are called hypercolumns. They consist of interconnected neurons (few tens of thousands) which are selectively sensitive to the geometric properties of the local image corresponding to the hypercolumn : edges, texture, contrast, etc. We propose a new functional model for these hypercolumns, which is based on the notion of structure tensor, a classical concept in image processing. This supposes that the averaged membrane potential  $V$  in each hypercolumn depends upon the structure tensor (and time). The equations for  $V$  are nonlinear (of Wilson-Cowan type) and it is natural to assume that they are invariant under the isometric transformations in the space  $H$  of structure tensors which turns out to have a hyperbolic Riemannian structure. A spontaneous activity of the hypercolumn may be observable when a bifurcation occurs from the state of rest, suggesting a way to verify experimentally the validity of the model. This will lead to the formation of a pattern in  $H$ . However the problem of pattern formation in a hyperbolic space is a difficult task and we only have preliminary results to show so far.

## 1 Introduction

La perception des images, quelle soit artificielle ou biologique, suppose l'extraction à partir des images formées sur la rétine d'un certain nombre de propriétés telles que la texture, les bords, les "coins", ceci à diverses échelles spatio-temporelles. Ces caractéristiques de l'image dépendent des variations locales de l'intensité du signal et conduisent donc de façon naturelle à les représenter à l'aide des dérivées de cette intensité. Ce point de vue a conduit à la construction d'algorithmes pour le traitement d'image et à l'introduction du concept de *tenseur de structure* dont on donnera une définition précise dans le paragraphe suivant (voir bibliographie dans [2]), mais qu'on peut définir rapidement comme la matrice des moments du second ordre construits à partir de ces dérivées. D'autre part il y a de forts indices que le système visuel neuronal de nombreuses espèces animales est capable de représenter des quantités liées aux dérivées du signal (voir [1]). Ces variations étant locales par nature on peut admettre que les hypercolonnes du

cortex visuel, qui sont des assemblages de quelques milliers à dizaines de milliers de neurones associés à des zones d'aire limitée du champ rétinien, sont sensibles à ces dérivées, et que le potentiel de membrane moyenné des hypercolonnes est en fait une fonction du tenseur de structure correspondant à ces petites portions d'image. Bien entendu une intégration de l'image globale suppose aussi des connexions "longue distance" entre les hypercolonnes, nous n'aborderons pas cette question ici. La réponse de l'hypercolonne à un signal est un processus non linéaire et peut être représenté par une équation intégral-différentielle pour le potentiel de membrane moyen dans l'hypercolonne, où la nonlinéarité apparaît comme un terme de saturation (typiquement une sigmoïde). Ici les variables d'espace sont en fait les éléments de l'espace des tenseurs de structure et il est naturel de supposer que les équations sont invariantes par les changements de coordonnées dans cet espace qui respectent les "distances" (isométries). Il semble en effet raisonnable de supposer que les représentations des propriétés des images sont robustes par changement de coordonnées. Cependant l'espace des tenseurs n'est pas euclidien. On verra au paragraphe suivant qu'il possède une structure d'espace riemannien hyperbolique. Par conséquent on va supposer que ces équations sont invariantes par l'action du groupe des isométries d'un espace hyperbolique que l'on caractérisera.

D'autre part, en l'absence de signal extérieur, le système peut être auto-excité par bifurcation à partir de l'état de repos. Dans ce cas la question est de comprendre, voire même de prédire le type de motifs spatio-temporels qui peuvent spontanément apparaître dans l'espace des tenseurs de structure. On est donc en présence d'un problème de *brisure spontanée de symétrie* dans un contexte non euclidien. L'intérêt de cette remarque d'un point de vue neurologique est que cela fournirait, en principe en tous cas, un moyen de tester expérimentalement la validité des hypothèses émises ci-dessus.

Dans cet article nous présentons des résultats préliminaires exposés en détail dans [2] sur ce problème fortement non trivial.

## 2 Présentation du modèle

### 2.1 Le tenseur de structure comme représentation des bords et de la texture des images

Soit  $g_{\sigma_1}(t)$  la gaussienne de moyenne 0 et variance  $\sigma_1^2$ ,  $Dg_{\sigma_1}(t)$  sa dérivée par rapport à  $t$ . On obtient des estimations  $I_x^{\sigma_1}$ ,  $I_y^{\sigma_1}$  des dérivées partielles  $I_x$  and  $I_y$  de  $I$  par convolution de  $I$  avec  $Dg_{\sigma_1}(x)$  et  $Dg_{\sigma_1}(y)$ . On calcule alors les moyennes  $\langle (I_x^{\sigma_1})^2 \rangle_{\sigma_2}$ ,  $\langle (I_y^{\sigma_1})^2 \rangle_{\sigma_2}$  et  $\langle I_x^{\sigma_1} I_y^{\sigma_1} \rangle_{\sigma_2}$  des trois quantités  $(I_x^{\sigma_1})^2$ ,  $(I_y^{\sigma_1})^2$  et  $I_x^{\sigma_1} I_y^{\sigma_1}$  dans un voisinage du point  $(x, y)$ . On forme ensuite la matrice  $\mathcal{T}$  définie par :

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \langle (I_x^{\sigma_1})^2 \rangle_{\sigma_2} & \langle I_x^{\sigma_1} I_y^{\sigma_1} \rangle_{\sigma_2} \\ \langle I_x^{\sigma_1} I_y^{\sigma_1} \rangle_{\sigma_2} & \langle (I_y^{\sigma_1})^2 \rangle_{\sigma_2} \end{bmatrix},$$

Cette matrice symétrique est aussi définie positive. On l'appelle tenseur de structure au point  $(x, y)$ . On notera que cette définition implique deux échelles spatiales : la 1ère définie par  $\sigma_1$  est celle à laquelle les dérivées de l'image sont estimées, la seconde, définie par  $\sigma_2$ , est celle à laquelle les moyennes de ces quantités estimées sont calculées.

Remarquons que l'espace des tenseurs de structure s'identifie à celui des formes quadratiques définies positives  $\mathcal{H}$ , dans lequel les changements de coordonnées sont donnés par l'expression

$$\mathcal{T}' = {}^t S \mathcal{T} S$$

pour toute matrice inversible  $S$ . Le groupe linéaire  $GL(2, \mathbb{R})$  agit donc naturellement dans  $\mathcal{H}$ .

Les valeurs propres  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$  de  $\mathcal{T}$  caractérisent l'organisation locale des variations de l'intensité de l'image. Par exemple  $\lambda_1 \gg \lambda_2$  indique un contraste important dans la direction propre de  $\lambda_1$ , tandis que  $\lambda_1 \simeq \lambda_2$  indique soit une distribution relativement isotrope des bordures à l'échelle définie par  $\sigma_2$  si les valeurs propres sont grandes, soit l'absence de bordures si les valeurs propres sont proches de 0. On suppose à présent, c'est une hypothèse fondamentale de notre modèle, que le potentiel de membrane moyenné dans l'hypercolonne est une fonction  $V(\mathcal{T}, \tau)$  du tenseur de structure  $\mathcal{T}$  et du temps  $\tau$ . Typiquement  $V(\mathcal{T}, \tau)$  sera grand si la valeur  $\mathcal{T}$  correspond aux valeurs de l'intensité dans le champ récepteur de la

colonne et faible dans le cas contraire. L'évolution temporelle de  $V$  est gouvernée par une équation du type Wilson and Cowan :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}(\mathcal{T}, \tau) = -\alpha V(\mathcal{T}, \tau) + \int_{\mathcal{H}} w(\mathcal{T}, \mathcal{T}') S(V(\mathcal{T}', \tau)) d\mathcal{T}' + I(\mathcal{T}, \tau) \quad (1)$$

où l'intégrale est prise sur l'espace des tenseurs de structure  $\mathcal{H}$ . Le coefficient positif  $\alpha$  peut être normalisé à 1 par un choix de l'échelle de temps, ce que l'on supposera par la suite. La fonction  $S$  est une sigmoïde qu'on peut normaliser sous la forme d'une fonction impaire

$$S(x) = \frac{1 - e^{-\mu x}}{2(1 + e^{-\mu x})} \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

où  $\mu$  est un coefficient qui gouverne la raideur de  $S$ . La fonction de "connectivité"  $w(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$  exprime la façon dont les neurones représentant la valeur  $\mathcal{T}$  excitent (resp. inhibent) les neurones représentant  $\mathcal{T}'$  lorsque la distance  $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$  est petite (resp. grande). Donc  $w(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = g(d(\mathcal{T}, \mathcal{T}'))$  où  $g$  est une fonction du type "chapeau mexicain" (typiquement une différence de deux gaussiennes). Admettant pour l'instant l'existence de cette distance dans  $\mathcal{H}$  invariante par le groupe  $GL(2, \mathbb{R})$ , il est alors facile de vérifier que l'équation (1) est invariante par les transformations de la forme  $g \cdot V(\mathcal{T}) = V({}^t g \mathcal{T} g)$  pour tout  $g \in GL(2, \mathbb{R})$ . Enfin,  $I$  est un terme représentant le signal d'entrée.

## 2.2 Géométrie de $\mathcal{H}$

$\mathcal{H}$  est l'ensemble des matrices

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}, \quad a > 0, \quad ab - c^2 > 0 \quad (3)$$

C'est donc un cône solide ouvert et l'on peut montrer que c'est une variété riemannienne de dimension 3 pour laquelle la distance est définie de la façon suivante [4].

$$d(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|\log \mathcal{T}_1^{-1} \mathcal{T}_2\|_F = \left( \sum_{i=1,2} \log^2 \lambda_i \right)^{1/2}, \quad (4)$$

où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{T}_1^{-1} \mathcal{T}_2$  (dont on vérifie qu'elle est symétrique, définie positive).

Remarquons que l'on peut aussi écrire  $\mathcal{T} = \xi \tilde{\mathcal{T}}$  où  $\xi > 0$  et  $\det(\tilde{\mathcal{T}}) = 1$ . Par conséquent  $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_0 \times \mathbb{R}^+$  où  $\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{T} \in \mathcal{H} / \det(\mathcal{T}) = 1\}$ . Mais  $\mathcal{H}_0$  est un feuillet d'hyperboloïde qui n'est autre que le *plan hyperbolique* de courbure  $-1$ . De plus, l'action de  $GL(2, \mathbb{R})$  se décompose en un produit direct du groupe des homothéties le long de la composante  $\mathbb{R}^+$  et du groupe d'isométries du plan hyperbolique.

Dans la suite on va simplifier notre analyse en cherchant des solutions de (1) qui sont invariantes par l'action du groupe des homothéties  $\mathbb{R}^*$ , c'est-à-dire restreintes à  $\mathcal{H}_0$ . L'invariance de l'équation par  $GL(2, \mathbb{R})$  entraîne que l'on peut effectivement restreindre l'analyse à ces solutions. En effet, écrivons (1) sous la forme d'une équation fonctionnelle

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = F(V).$$

L'invariance par l'action de  $GL(2, \mathbb{R})$  se traduit par l'équivariance de l'opérateur (non linéaire)  $F : F(g \cdot V) = g \cdot F(V)$ ,  $g \in GL(2, \mathbb{R})$ ,  $V \in \mathcal{H}$ . Si  $\xi \cdot V = V$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^*$ , on a donc aussi  $\xi \cdot F(V) = F(V)$ .

### 2.3 Analyse dans $\mathcal{H}_0$

Pour une raison de commodité on commence par identifier  $\mathcal{H}_0$  avec le disque de Poincaré  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  par le changement de variables (où  $z = z_1 + iz_2 \in D$ )

$$\begin{cases} a = \frac{(1+z_1)^2 + z_2^2}{1-z_1^2 - z_2^2} \\ b = \frac{(1-z_1)^2 + z_2^2}{1-z_1^2 - z_2^2} \\ c = \frac{2z_2}{1-z_1^2 - z_2^2} \end{cases}$$

La distance hyperbolique dans  $D$  est définie par

$$d_1(z, z') = \operatorname{argth} \frac{|z - z'|}{|1 - \bar{z}z'|}.$$

On peut montrer que si  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  sont dans  $\mathcal{H}_0$ , la géodésique qui les joint est dans  $\mathcal{H}_0$  et la distance  $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = d_1(z, z')$ . Le groupe des isométries directes de  $D$  est le groupe spécial unitaire  $SU(1, 1)$  des matrices de la forme

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2$$

qui agit dans  $D$  par les transformations homographiques  $g \cdot z = (\alpha z + \beta) / (\bar{\beta} z + \bar{\alpha})$ ,  $z \in D$ . Chaque élément de ce groupe se décompose en un produit  $g = r_\varphi \cdot a_t \cdot n_s$  où

$$r_\varphi = \begin{bmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{bmatrix}, \quad a_t = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}, \quad n_s = \begin{bmatrix} 1 + is & -is \\ is & 1 - is \end{bmatrix}$$

Afin de procéder à une analyse de Fourier dans  $D$ , Helgason [3] a introduit des fonctions d'onde élémentaires  $e_{\lambda, b}$  qui sont définies de la façon suivante. Si  $b$  désigne un point du cercle unité  $\partial D$ , notons  $\langle z, b \rangle$  la distance (algébrique) à l'origine de l'unique cercle euclidien tangent à  $\partial D$  en  $b$  et passant par  $z$ . Ce cercle est un *horocycle*, et si  $b = 1$  c'est l'orbite de  $z$  par l'action du groupe  $N = \{n_s, s \in \mathbb{R}\}$ . On pose

$$e_{\lambda, b} = e^{(i\lambda+1)\langle z, b \rangle}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Alors  $e_{\lambda, b}$  est une fonction propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami de  $D$  pour la valeur propre  $-\lambda^2 - 1$ . Ces fonctions élémentaires jouent un rôle capital dans l'analyse de Fourier dans  $D$  et dans l'étude du spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami pour les surfaces de Riemann hyperboliques (dont le plan hyperbolique est le revêtement universel). Nous les utiliserons d'une façon plus élémentaire.

### 3 Bifurcation d'ondes planes dans $\mathcal{H}_0$ pour l'équation (1)

Dans ce paragraphe on considère l'équation (1) restreinte à  $\mathcal{H}_0 \simeq D$  et on suppose que le terme d'entrée  $I = 0$ , de sorte que  $V = 0$  est une solution. Lorsque le terme intégral est assez petit, le terme d'amortissement  $-V$  est dominant et cette solution "de base" est stable. On s'intéresse à la bifurcation de nouvelles solutions à partir de cet état de base.

Par construction les fonctions  $e_{\lambda, b}$  sont invariantes par l'action du groupe  $N_b = r_b \cdot N \cdot r_{-b}$  où  $r_b$  est la rotation qui fait passer du point 1 au point  $b$  sur le bord du disque de Poincaré  $\partial D$ . Par rotation on se ramène au cas où  $b = 1$ . On va à présent restreindre encore notre étude en ne considérant que des solutions de (1) qui sont à la fois invariantes par l'action du groupe  $N$  et par un sous groupe discret du groupe à un paramètre  $A = \{a_t, t \in \mathbb{R}\}$  (donc périodiques par rapport à l'action de  $A$ ). Les fonctions d'onde élémentaires qui satisfont à ces conditions sont celles pour lesquelles  $b = 1$  et  $\lambda = \alpha + i$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

ce qui correspond à des valeurs propres de  $\Delta$  complexes  $-\alpha^2 - 2i\alpha$ . Ces solutions sont invariantes par l'action du sous-groupe  $N \times \frac{2\pi}{\alpha}Z$  de  $SU(1,1)$ , par conséquent on peut restreindre l'analyse aux fonctions qui possèdent cette propriété du fait de l'invariance de (1) par  $SU(1,1)$ . Ceci revient à chercher les solutions de l'équation projetée dans l'espace quotient  $D/(N \times \frac{2\pi}{\alpha}Z)$ , or cet espace est isomorphe à  $S^1$ . Par conséquent on s'attend à ce que le spectre de l'opérateur intégral linéarisé soit constitué de valeurs propres de multiplicité finie, ce qui permettra de traiter "classiquement" le problème de bifurcation.

### 3.1 Etude linéaire

L'équation (1) linéarisée dans  $D$  en  $V = 0$  s'écrit

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}(z, \tau) = -V(z, \tau) + \mu \int_D w(z, z')V(z', \tau)dm(z') \quad (5)$$

où  $\mu = S'_0(0)$  est notre paramètre de bifurcation et  $dm(z) = (1 - |z|^2)^{-2} dzd\bar{z}$  (mesure hyperbolique dans  $D$ ). On se place dans les *coordonnées horocycliques*, c'est-à-dire qu'on pose  $z = n_s \cdot a_t \cdot O$ . Compte tenu de la condition d'invariance par  $N \times \frac{2\pi}{\alpha}Z$  on cherche  $V(n_s \cdot a_t \cdot O, \tau) = e^{\sigma\tau}\tilde{V}(a_t)$ . Après quelques calculs on peut réécrire l'équation ci-dessus sous la forme réduite

$$\sigma\tilde{V} = -\tilde{V} + \mu\tilde{w} \star \tilde{V}$$

où

$$\tilde{w}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} w(a_\xi \cdot O, n_x \cdot O)dx.$$

On applique la transformée de Fourier de Helgason [3]

$$\hat{h}(\lambda, b) = \int_D h(z)e^{(-i\lambda+1)\langle z, b \rangle} dm(z)$$

ce qui, en cherchant des solutions de périodicité  $2\pi/\alpha$  en la coordonnée  $t$ , revient à résoudre

$$\sigma(\alpha) = -1 + \mu\hat{w}(\alpha)$$

où  $\hat{w}$  est la transformée de Fourier de  $\tilde{w}$ . Les calculs effectués pour différents types de fonction de connectivité  $w$  (mais toujours "chapeau mexicain") montrent que les valeurs propres  $\sigma$  sont complexes en général et que la condition  $\Re\sigma = 0$  définit une courbe  $\mu(\alpha)$  qui présente un minimum pour une valeur non nulle de  $\alpha$ . On a donc une valeur critique  $\mu_c$  qui correspond à une bifurcation de Hopf ( $\Im\sigma \neq 0$ ).

### 3.2 Calcul des bifurcations

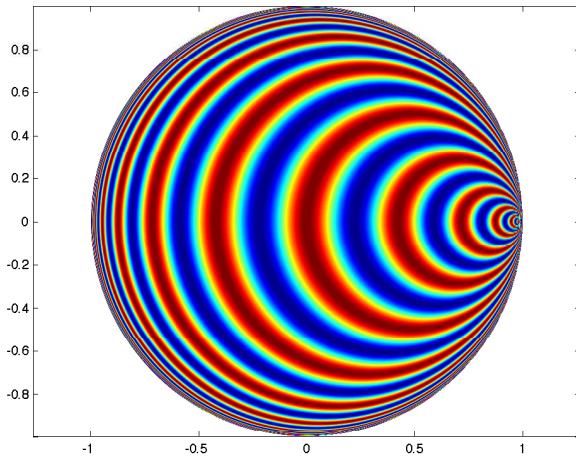
Le calcul des solutions bifurquées est classique et n'est pas détaillé ici (voir [2]). Au premier ordre, les solutions s'écrivent

$$V_0(\tau) = \varepsilon \left[ e^{i(\omega\tau+\varphi)} e_{\alpha_c+i, b} + e^{-i(\omega\tau+\varphi)} \overline{e_{\alpha_c+i, b}} \right]$$

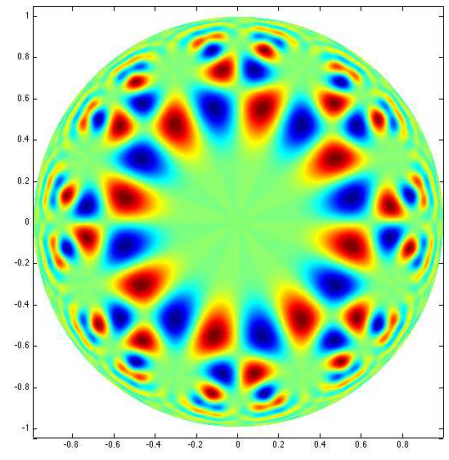
où  $\alpha_c$  est la valeur de  $\alpha$  pour laquelle  $\mu(\alpha)$  est minimum et  $\varphi$  est une phase arbitraire. La valeur de  $b$  est également arbitraire ce qui correspond à l'invariance des équations par rotations.

Ces solutions apparaissent comme des *ondes progressives* émises depuis le point  $b$  ("l'infini") dont la Fig. 1 donne un instantané dans le cas où  $b = 1$ .

Les solutions calculées dans ce travail ont le mérite d'exister mais il n'y a pas de relation évidente entre leur structure et le type de motifs bifurqués qu'on attendrait dans ce problème. D'une part il serait naturel de trouver des structures stationnaires et non dépendant du temps, d'autre part ces ondes périodiques ne sont pas des structures locales. Elles sont en fait analogues à des structures en bandes périodiques ("stripes") dans le cas euclidien. En fait, de nombreuses autres structures spatialement périodiques mais



**Fig. 1.** Ondes progressives émises depuis le point  $b$  ( $b = 1$ ).



**Fig. 2.** Solutions invariantes par pavage octogonal du disque de Poincaré.

temporellement stationnaires, associées à des pavages du plan hyperbolique, pourraient également bifurquer. Une étude de telles solutions est en cours, ainsi que la prise en compte du problème 3d (c'est-à-dire dans  $\mathcal{H} \simeq D \times \mathbb{R}^+$ ). Il faut toutefois noter que le problème de la bifurcation de structures spatialement périodiques dans le plan hyperbolique ou dans  $\mathcal{H}$  est considérablement plus compliquée que dans le cas euclidien en raison de la difficulté à calculer les fonctions propres mais aussi de la diversité "infinie" des pavages périodiques hyperboliques. Il est possible aussi que les solutions sélectionnées par les nonlinéarités de ce problème soient en fait beaucoup plus complexes (pavages aperiodiques).

Une approche préliminaire et un exemple pour le cas spatialement périodique sont développés dans [2]. L'exemple est celui du pavage de  $D$  par un octogone. Le sous-groupe discret de  $SU(1, 1)$  qui engendre ce pavage est un groupe fuchsien qui possède 4 générateurs  $g_j$ ,  $j = 0, \dots, 4$ . Le générateur  $g_0$  est un "boost" (un élément du groupe de transformations hyperboliques  $A$ , les trois autres étant obtenus par rotation de  $g_0$  d'angles  $j\pi/4$  ( $j = 1, 2, 3$ )). La Fig. 2 montre un exemple de "pattern" pour des solutions invariantes par ce pavage octogonal du disque de Poincaré.

## Références

1. LM CHALUPA & J WERNER, (Editors), *The visual neurosciences*, MIT Press (2004).
2. P. CHOSSAT & O. FAUGERAS, Hyperbolic Planforms in Relation to Visual Edges and Textures Perception, *PLoS Computational Biology*, **5** (12), e10000625 (2009).
3. S HELGASON, *Groups and geometric analysis*, Pure and Applied Mathematics series **113**, Academic Press (1984).
4. M MOAKHER, A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **26**, 735–747 (2005).