

Perturbations non-linéaires optimales dans un écoulement de Couette plan

Yohann Duguet^{1,2} & Luca Brandt² & Robin B. Larsson²

¹ LIMSI-CNRS, UPR 3251, 91403 Orsay Cedex, France

² KTH Mechanics, Linné Flow Centre, Osquars Backe 18, SE-10044 Stockholm, Suède
duguet@limsi.fr

Résumé. Dans de nombreux écoulements cisailés, la transition vers la turbulence s’observe en l’absence d’instabilité linéaire de l’écoulement de base. Nous nous proposons d’étudier numériquement les mécanismes qui permettent d’initier un écoulement turbulent avec une perturbation initiale de moindre énergie. L’exemple choisi est celui d’un écoulement de Couette plan incompressible entre deux parois planes se déplaçant parallèlement avec des vitesses opposées. Le nombre de Reynolds est de 400, et le domaine de calcul est une cellule tridimensionnelle périodique de taille comparable au Minimal Flow Unit, la taille critique pour qu’un écoulement turbulent puisse se maintenir. Cette perturbation est recherchée comme une superposition de modes linéaires optimaux, dont l’amplification linéaire transitoire est maximale. Un algorithme d’optimisation non-linéaire de l’énergie initiale met en évidence le rôle prépondérant des modes ‘obliques’ par rapport aux perturbations essentiellement bidimensionnelles. Le scénario complet de la transition peut être suivi dans l’espace de Fourier associé : interactions nonlinéaires et croissance transitoire des modes excités amènent l’écoulement au voisinage d’un état non-linéaire non identifié auparavant. Il s’agit d’un écoulement stationnaire dominé par des streaks de faible amplitude. Cet état limite instable est la dernière étape cohérente avant d’atteindre l’état turbulent. L’énergie critique des perturbations initiales de type oblique ou longitudinal est aussi étudiée en fonction du nombre de Reynolds et de la longueur du domaine de calcul. Des calculs avec une bonne résolution numérique suggèrent un seuil critique évoluant comme $E_c = O(Re^{-2})$, en accord avec plusieurs prédictions théoriques et expérimentales.

Abstract. In many shear flows, transition to turbulence occurs even in the absence of linear instability of the base flow. In this study we are investigating the mechanisms which can trigger a turbulent flow starting from a disturbance with least initial energy. We focus here is on plane Couette flow, the incompressible flow between two parallel countersliding plates. The Reynolds number is 400 and the numerical domain is a tridimensional periodic cell, whose size is comparable to the Minimal Flow Unit, the minimal domain size for turbulence to be sustained. Such a minimal perturbation is sought as a linear combination of linear optimal modes, those with maximal transient linear amplification. A nonlinear optimisation algorithm shows the importance of ‘oblique’ waves compared to nearly two-dimensional perturbations. The full transition scenario starting from the optimal initial disturbance can be tracked in the associated Fourier space : nonlinear interaction and transient growth of the excited Fourier modes bring the system close to an edge state not identified in former transition studies. This state corresponds to a steady flow dominated by low-amplitude streaks. It is unstable and represents the last coherent stage before breakdown into a turbulent flow. The kinetic energy of initial disturbances of oblique or longitudinal type is investigated as a function of the Reynolds number and of the domain length. Well-resolved computations suggest a critical threshold energy varying as $E_c = O(Re^{-2})$, in good agreement with theoretical and experimental predictions.

1 Introduction

Nous étudions ici la transition vers la turbulence dans les écoulements de fluide newtonien incompressible, en choisissant l’exemple générique de l’écoulement de Couette plan entre deux plaques planes parallèles de déplaçant dans des sens opposés. Le nombre de Reynolds est défini par $Re = \frac{Uh}{\nu}$, où $\pm U$ est la vitesse des parois, $2h$ est l’espacement entre les plaques, et ν représente la viscosité cinématique du fluide. Cet écoulement, régi par les équations de Navier-Stokes, admet une solution de base unidimensionnelle, qui est linéairement stable quelque soit la valeur de Re . Malgré l’absence de modes propres instables,

la non-normalité de l'opérateur linéarisé permet d'expliquer la croissance (transitoire) de certaines perturbations à l'écoulement de base [1]. Le concept (linéaire) de modes optimaux (ceux dont la croissance transitoire en énergie est maximale) a pris forme, expliquant l'émergence au sein de l'écoulement de structures cohérentes représentatives de l'écoulement turbulent. La pertinence de ce concept est cependant limitée par sa nature linéaire, alors que la transition vers la turbulence n'est possible en pratique qu'en présence de perturbations d'amplitude finie. Dans cette étude, nous nous intéressons au concept de modes non-linéaires optimaux, c'est-à-dire aux perturbations d'énergie minimale permettant au système complet d'évoluer vers l'état turbulent. Dans la mesure où le système repose sur deux attracteurs (l'état laminaire et l'état turbulent), l'énergie de la perturbation recherchée indique le diamètre minimal du bassin d'attraction de l'état laminaire. Ce problème d'optimisation non-linéaire en dimension infinie peut être simplifié en tenant compte des découvertes récentes sur la topologie de l'espace des phases associé au système. D'une part, nous supposons que la perturbation initiale recherchée peut s'écrire comme la somme pondérée de m modes linéaires optimaux \bar{U}_i , $i = 1, \dots, m$, ce qui réduit à m la dimension du problème :

$$\mathbf{U}(t = 0) = \sum_{i=1}^m A_i \bar{U}_i. \quad (1)$$

Cette décomposition est une approximation justifiée a priori dans la mesure où l'énergie initiale de la perturbation est suffisamment faible pour favoriser le rôle des modes qui croissent le plus. De plus, tous les modes linéaires optimaux vérifient les conditions d'optimalité non-linéaires nécessaires [2]. D'autre part, des travaux récents ont montré l'existence d'un régime asymptotique non-linéaire intermédiaire entre laminaire et turbulent, baptisé état limite (*edge state*) [4]. A toute perturbation initiale est associée une énergie critique, à partir de laquelle le système évolue de façon transitoire vers l'état limite, avant de diverger, soit vers l'état laminaire soit vers l'état turbulent (voir figure 1). Ce régime intermédiaire, par nature instable, peut être identifié par simulation numérique directe via un procédé de bisection de l'amplitude de la perturbation considérée. Puisque l'état limite est un passage obligé des trajectoires de l'espace des phases proche de la criticalité, il peut servir de cible pour des trajectoires sous contraintes. Ce choix, pertinent vue la nature critique des perturbations non-linéaires optimales, permet d'une part des simulations beaucoup moins coûteuses, d'autre part une optimisation avec une contrainte dynamiquement mieux définie que la notion relativement vague d'état turbulent.

2 Méthode numérique

Les équations de Navier-Stokes tri-dimensionnelles sont discrétisées selon une méthode de collocation spectrale dans les directions longitudinale x et transversale z , et selon un développement en modes de Chebyshev dans la direction y normale aux parois. L'avancement en temps est assuré par un schéma du type Runge-Kutta d'ordre 4. Le domaine spatial considéré a les dimensions suivantes : $(L_x, L_y, L_z) = 4\pi h \times 2h \times 2\pi h$, ce qui le rapproche du domaine minimal dans lequel un écoulement turbulent peut se maintenir. La résolution numérique adoptée pour $Re = 400$ est de 33 modes selon y , et de 48 modes en x et z . Cette résolution est poussée à 65 modes en y et 48 modes en x et z pour Re entre 1500 et 3500. Pour toute perturbation initiale tri-dimensionnelle permettant la transition vers la turbulence, l'énergie critique E_c est déterminée approximativement par une méthode de bisection, jusqu'à ce que la trajectoire associée en un temps donné n'évolue ni vers l'état laminaire ni vers l'état turbulent. Cette étape est de loin la plus coûteuse au sein du processus d'optimisation. La recherche de minima de E_c dans le sous-espace engendré par les vecteurs $\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_m$ est réalisée par une méthode de Newton, afin d'identifier les zéros de la fonctionnelle

$$\nabla_m E_c : (A_1, \dots, A_m) \rightarrow \left(\frac{\partial E_c}{\partial A_1}, \dots, \frac{\partial E_c}{\partial A_m} \right). \quad (2)$$

L'optimisation a été réalisée pour $m = 2$ puis $m = 3$. Différentes combinaisons de modes optimaux de bas ordre (ceux dont la croissance transitoire est optimale) ont été envisagées comme conditions initiales

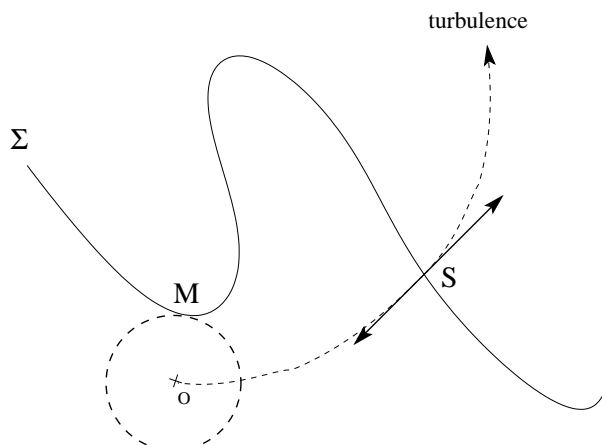


Fig. 1. Schéma simplifié de la topologie de l'espace des phases (de dimension infinie). O représente l'état de base (laminaire) du système. Σ est la frontière laminaire-turbulent, séparant les conditions initiales menant à l'état laminaire de celles menant à l'état turbulent. S représente l'état limite instable, atteint asymptotiquement par toutes les trajectoires contraintes à rester sur Σ . Enfin, M représente la perturbation non-linéaire optimale recherchée, c'est-à-dire la perturbation de moindre énergie appartenant à Σ . Toute trajectoire super-critique issue d'un voisinage M visite S de façon transitoire avant d'approcher l'état turbulent.

pour l'algorithme itératif d'optimisation. Tous les modes optimaux initiaux sont présentés sous la forme (k_x, k_z) , où k_x et k_z sont les nombres d'onde respectivement longitudinal et transverse de la perturbation considérée. La méthode d'optimisation permettant de calculer ces modes pour chaque combinaison (k_x, k_z) se base sur la décomposition SVD de la matrice associée à l'opérateur linéarisé [1].

3 Résultats

Nous présentons tout d'abord les résultats pour $m = 2$ et $Re = 400$. Le mode linéaire $(0, 2)$ est celui qui possède le plus fort taux de croissance transitoire (pour tout Re), cependant il ne peut assurer à lui seul la transition vers la turbulence car le champ de vitesse associé est bidimensionnel. Il doit donc être perturbé par des modes obliques de bas ordre comme $(1, 1)$ ou $(1, 2)$, ce qui donne lieu au scénario appelé SV. D'autre part, la paire de mode purement oblique $(1, \pm 1)$ (OW), qui mène à un état turbulent fortement symétrique, est également considérée [3]. Les résultats de l'optimisation mettent en évidence le fait que le scénario OW est associé à un seuil critique en énergie plus bas d'un ordre de magnitude que le scénario SV. Les résultats dans le cas bi-modal confirment donc ceux de Reddy *et al* [5]. Enfin, les énergies critiques associées aux scénarios SV et OW ont été calculées en fonction de Re . Les deux scénarios présentent une asymptote claire en $E_c \sim O(Re^{-2})$. Le scénario OW reste donc constamment optimal par rapport au scénario SV. Les résultats présentés ici ont demandé une résolution numérique accrue pour $Re \geq 1500$. Ceci permet de corriger les estimations numériques de [5] qui indiquent un exposant de -2.5 à cause d'une résolution trop faible dans la direction y . Un exposant de -2 (-1 pour l'amplitude critique) est en accord parfait avec les prédictions théoriques les plus récentes [6,7] ainsi qu'avec les résultats expérimentaux en conduite cylindrique [8].

Le cas $m = 3$ (toujours pour $Re = 400$) est plus délicat car il nécessite plus d'essais à partir de conditions initiales différentes, ainsi que des calculs plus coûteux. 500 jours de calcul répartis sur 8 processeurs, à partir de 60 conditions initiales différentes, ont montré l'existence d'une seule perturbation M qui est un zéro de $\nabla_3 E_c$. Elle est constituée des modes obliques $(1, \pm 1)$, d'amplitudes inégales, et du mode $(1, 2)$. Les résultats de l'optimisation sont contenus dans la table 1. L'énergie critique associée n'est que 2% plus faible que celle du scénario OW, ce qui démontre l'importance du mécanisme sous-jacent. Cependant, l'état turbulent associé à M est ici plus réaliste puisqu'il n'est plus soumis aux contraintes de symétrie

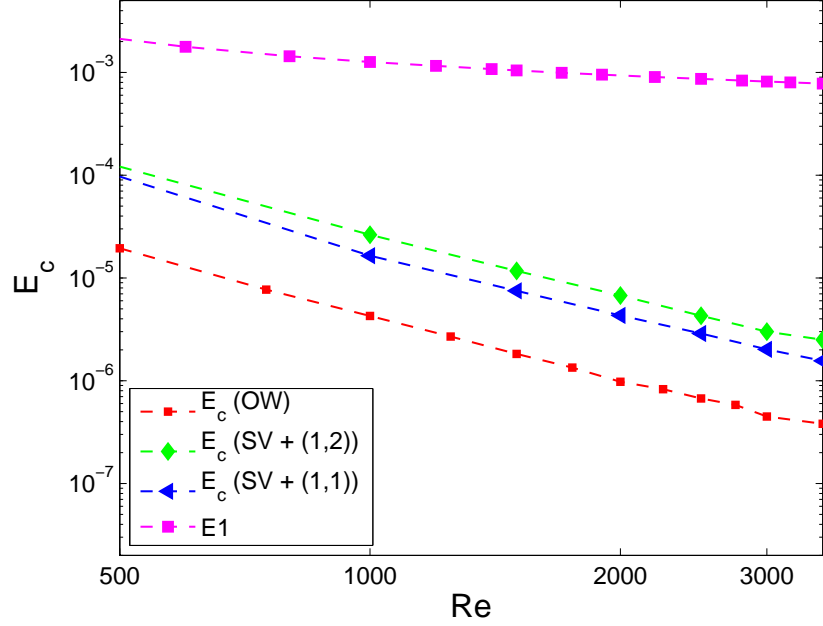


Fig. 2. Energies critiques associées aux scénarios SV (*streamwise vortices*) et OW (*oblique waves*) en fonction de Re . Le régime asymptotique vérifie $E_c \sim O(Re^{-2})$. $E1$ représente l'état limite (*edge state*) approché de façon transitoire par les perturbations de type oblique.

fortes des conditions initiales de type OW.

Afin d'analyser le processus de transition associé à M , nous avons généré une trajectoire à partir de la condition initiale $(1 + \varepsilon)M$, avec $\varepsilon = 10^{-2}$. Le champ des vitesses dans une section transversale est représenté sur la figure 3. Les énergies des différentes composantes spectrales (k_x, k_z) sont représentées en fonction du temps sur la figure 4. La croissance énergétique des modes principaux cède le pas à un plateau d'énergie constante, correspondant à l'approche transitoire d'une onde stationnaire $E1$. Cet état stationnaire forme un point-selle sur Σ , non identifié dans les études précédentes. L'instabilité linéaire de $E1$ mène directement le système à l'état turbulent. On notera que $E1$, caractérisé par des stries longitudinales de relativement faible amplitude, est approché par toutes les conditions initiales dominées par la paire oblique $(1, \pm 1)$. Au contraire, les conditions plus proches du scénario SV (voir table 1) approchent deux autres états stationnaires $E2$ et $E3$ déjà identifiés [4].

Tab.1. Energie des ondes stationnaires identifiées sur la frontière laminaire-turbulent Σ , associée à l'énergie minimale des perturbations permettant de les approcher de façon transitoire. La perturbation optimale trouvée avec $m = 3$ est sur la première ligne. $Re = 400$.

Etat limite	Energie	Energie initiale	Perturbation
$E1$	$2.84 \cdot 10^{-3}$	$3.276 \cdot 10^{-5}$	$E_{(1,2)} = 0.0192E_{(1,1)} = 0.0327E_{(1,-1)}$
$E1$	$2.84 \cdot 10^{-3}$	$3.34 \cdot 10^{-5}$	$E_{(1,1)} = E_{(1,-1)}$
$E2$	$1.82 \cdot 10^{-2}$	$1.98 \cdot 10^{-4}$	$E_{(1,2)} = 0.0965E_{(0,2)}$
$E3$	$2.61 \cdot 10^{-2}$	$1.72 \cdot 10^{-4}$	$E_{(1,1)} = 0.48E_{(0,2)}$

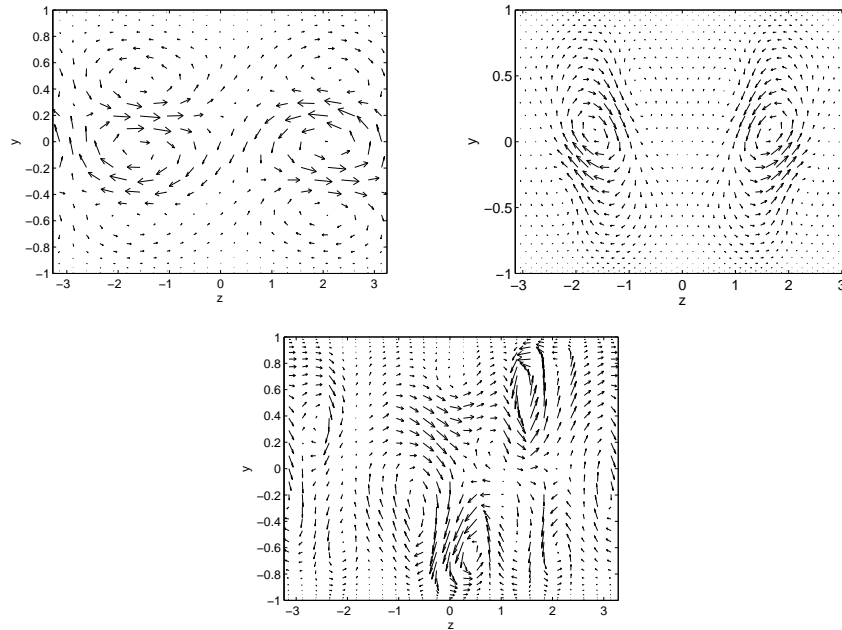


Fig. 3. Coupe transversale du champ des vitesses dans une section $z = cste$ pendant le processus de transition pour $Re = 400$. A gauche : perturbation optimale M (voir texte), au centre : état limite stationnaire $E1$ approché de façon transitoire, à droite : état turbulent final.

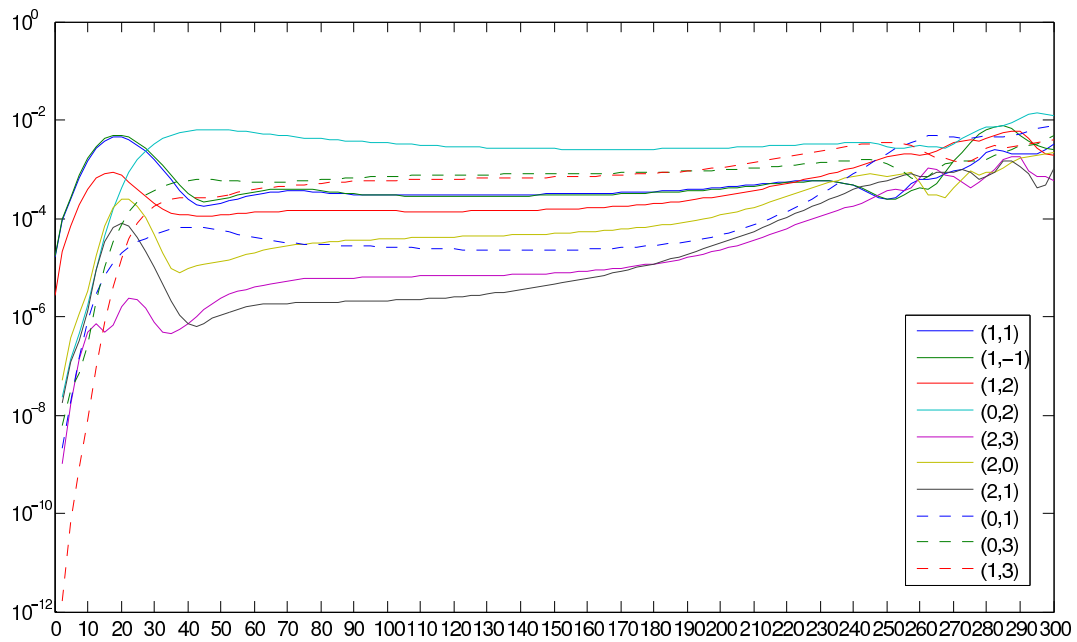


Fig. 4. Energie contenue dans divers modes (k_x, k_z) en fonction du temps, le long de la trajectoire partant du voisinage de la perturbation optimale M pour $m = 3$, constituée des modes $(1, \pm 1)$ et $(1, 2)$. $Re = 400$.

L'analyse fine des interactions non-linéaires agissant le long de la trajectoire issue du voisinage de M indique de plus les mécanismes modaux à l'œuvre dans le processus d'optimisation. Ces interactions sont du type $\pm(k_x^1, k_z^1) \pm (k_x^2, k_z^2) \rightarrow (\pm k_x^1 \pm k_x^2, \pm k_z^1 \pm k_z^2)$ puisque la non-linéarité dans les équations de

Navier-Stokes et de type quadratique. Tous les modes issus d'interactions quadratiques avec $(1, 1)$, $(1, -1)$ et $(1, 2)$ sont présents, cependant on remarque également la présence dominante du mode $(0, 2)$, puis de $(1, 3)$ et $(0, 3)$, pendant la visite de $E1$. $(0, 2)$ est le mode dominant qui structure l'écoulement en stries. Comme $(1, 3)$, il est issu de l'interaction entre $(1, 1)$ et son conjugué. $(0, 3)$ ne peut en revanche pas résulter de l'interaction quadratique de ces deux modes obliques, et nécessite l'adjonction initiale du mode $(1, 2)$. Ces résultats suggèrent que l'énergie critique d'une perturbation peut être abaissée lorsque les modes initiaux participent, directement ou via des interactions quadratiques, au spectre de l'état limite correspondant.

Références

1. S.C. REDDY & D. S. HENNINGSON, Energy growth in viscous channel flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **252**, 209-238 (1993).
2. C. COSSU, An optimality condition on the minimum energy threshold in subcritical instabilities, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* (Mécanique), **333** (4), 331 (2005).
3. P. J. SCHMID & D.S. HENNINGSON, A new mechanism for rapid transition involving a pair of oblique waves, *Physics of Fluids*, **4** (9), 1992.
4. T. M. SCHNEIDER, J. F. GIBSON, M. LAGHA, F. DE LILLO AND B. ECKHARDT, Laminar-turbulent boundary in plane Couette flow, *Physical Review E*, 037301 (2008).
5. S. C. REDDY, P. J. SCHMID, J. S. BAGGETT & D. S. HENNINGSON, On the stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **365**, 269 (1998).
6. J. S. CHAPMAN, Subcritical transition in channel flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **451**, 35, (2002).
7. F. WALEFFE & J. WANG, Transition Threshold and the Self-Sustaining Process , *IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition and Finite Amplitude Solutions*, Springer, Dordecht (2005).
8. B. HOF, A. JUEL & T. MULLIN, Scaling of the turbulence transition threshold in a pipe, *Physical Review Letters*, **91**, 244502 (2003).