

Ondes modulées dans le système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient radial de température

Raphaël Guillermin, Arnaud Prigent & Innocent Mutabazi

LOMC - FRE 3102, 53 Rue de Prony, 76 058 Le Havre cedex
arnaud.prigent@univ-lehavre.fr

Résumé. Nous étudions l'écoulement lié au couplage de la force centrifuge et des effets thermiques dans un système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient radial de température et dont le rapport des rayons et le rapport d'aspect valent respectivement 0,8 et 112. Pour cela, nous avons développé une technique de mesure non-intrusive de la température et de la vitesse basée sur l'utilisation de cristaux liquides thermochromiques. Les résultats que nous présentons sont obtenus en imposant une forte valeur du nombre de Grashof et en augmentant progressivement le nombre de Taylor. Au-dessus d'une valeur critique du nombre de Taylor, l'écoulement de base, composé d'une grande cellule convective due au gradient radial de température et de l'écoulement de Couette circulaire, devient instable. Pour les grandes valeurs du nombre de Grashof, il est remplacé par une spirale modulée présente sur toute la longueur du système et tournant à la vitesse angulaire moyenne de l'écoulement. Le motif ainsi formé peut être décrit comme un ensemble de paquets d'onde dont nous avons étudié l'enveloppe. Nous montrons qu'elle peut être modélisée sous la forme $A(t) = A_{max}.sech[(t - t_{max})/T_{mod}]$ où A_{max} est le maximum de l'amplitude d'un paquet, t_{max} l'instant auquel se trouve ce maximum et T_{mod} la période de modulation correspondant à la durée d'un paquet. La variation linéaire de A_{max}^2 avec le nombre de Grashof, indique que ce motif d'onde modulée apparaît via une bifurcation supercritique quand on augmente le nombre de Grashof.

Abstract. This experimental work focused on the study of the flow induced by the coupling between the centrifugal force and thermal effects in a Couette-Taylor system submitted to a high radial temperature gradient. The geometrical parameters of our system are fixed with aspect ratio and radius ratio respectively equal to 112 and 0,8. We have developed a non-intrusive velocity and temperature fields measurement technique using thermochromic liquid crystals. In this study, the Grashof number is fixed and the Taylor number is progressively increased. Above a critical value of Ta, the base flow is destabilized and replaced by a modulated spiral pattern that fills almost the whole length of the system and rotates at the mean angular velocity of the flow. It produces a modulated wave-like pattern with a wave packet shape which envelope can be fitted by $A(t) = A_{max}.sech[(t - t_{max})/T_{mod}]$ where A_{max} is the amplitude maximum of a packet, t_{max} the time at which this maximum occurs and T_{mod} the modulation period corresponding to the lifetime of the packet. A_{max}^2 increases linearly with the Grashof number indicating a supercritical bifurcation to the modulated wave-like pattern when the Grashof number is increased.

1 Introduction

Nous nous intéressons à l'écoulement produit dans un système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient radial de température. Le système de Couette-Taylor, composé de deux cylindres coaxiaux en rotation, est depuis longtemps considéré comme un système modèle pour l'étude des effets centrifuges et de la transition vers la turbulence dans les écoulements fermés [1,2]. Sa compréhension est également importante pour un grand nombre d'applications pour lesquelles il est nécessaire de tenir compte des effets thermiques. La première observation des complications engendrées par les effets thermiques est généralement attribuée à Taylor lui-même [1]. En effet, il a rapporté dans certains cas l'apparition d'un écoulement de type spiralé au lieu des rouleaux stationnaires axisymétriques portant son nom et ce phénomène, non prédit par la théorie dans le cadre d'un fluide isotherme [1], fut a posteriori [3] associé à la présence d'un écoulement axial lié à l'existence d'un gradient de température. Depuis, plusieurs études théoriques, expérimentales et numériques ont été réalisées sur le système de Couette-Taylor soumis à un gradient radial de température. Snyder et Karlsson [4] ont étudié expérimentalement l'effet d'un gradient radial de température sur la stabilité de l'écoulement. Ball et Farouk [5] ont montré la complexité des

phénomènes apparaissant en faisant varier les effets thermo-centrifuges. Ali et Weidman [6] ont conduit une étude théorique sur l'influence des divers paramètres de contrôle du système sur la stabilité de l'écoulement. Kuo et Ball [7] ont établi un diagramme de stabilité répertoriant les différents régimes d'écoulement en fonction de l'écart de température et de la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Ils ont montré qu'une modulation basse fréquence apparaissait lorsque les effets thermiques et centrifuges devenaient plus forts. Nous avons déjà rapporté l'apparition d'une modulation basse fréquence similaire [8] mais souhaitons en donner une description plus complète ici. En effet, nous avons développé une méthode non intrusive de mesure de la température et de la vitesse basée sur l'utilisation de cristaux liquides thermochromiques (CLT) qui nous permet de caractériser l'écoulement produit dans notre système de Couette-Taylor soumis à un gradient radial de température. Nous avons aussi procédé à une nouvelle analyse de nos signaux que nous avons transformé sous la forme de séries temporelles.

2 Le dispositif expérimental

Le système est composé de deux cylindres coaxiaux verticaux de même longueur $L = 57$ cm : un cylindre intérieur en aluminium anodisé noir de rayon $a = 2$ cm et un cylindre extérieur fixe en verre transparent de rayon $b = 2,5$ cm (Fig. 1). L'entrefer entre les deux cylindres est alors $d = b - a = 0,5$ cm et le rapport des rayons est $\eta = a/b = 0,8$. L'espace annulaire est fermé par deux anneaux de Téflon fixés sur le cylindre extérieur. Ainsi, la longueur utile de l'écoulement étudié est $H = 55,4$ cm et le rapport d'aspect est $\Gamma = H/d = 112$. Le cylindre intérieur est mis en rotation à la fréquence angulaire Ω . Le système est immergé dans une large cuve cylindrique en verre de rayon $c = 5$ cm et le cylindre intérieur est creux. Les cylindres intérieur et extérieur peuvent donc être maintenus à des températures fixées via deux circulations reliées à des bains thermostatés, l'une dans le cylindre intérieur et l'autre entre les deux cylindres périphériques. Des mesures de température effectuées en insérant des thermocouples dans les anneaux en Téflon, ont montré l'absence de gradient vertical de température. L'écoulement dans le système peut être décrit par trois paramètres de contrôle physiques : le nombre de Taylor $Ta = (\Omega a d / \nu) \cdot (d/a)^{1/2}$ lié aux effets inertiels, le nombre de Grashof $Gr = g \alpha \Delta T d^3 / \nu^2$ lié aux effets thermiques et le nombre de Prandtl $Pr = \nu / \kappa$ lié aux propriétés du fluide. Le nombre de Richardson reliant les effets thermiques et inertiels est aussi utilisé $\sigma = Gr \cdot a / d \cdot Ta^2$.

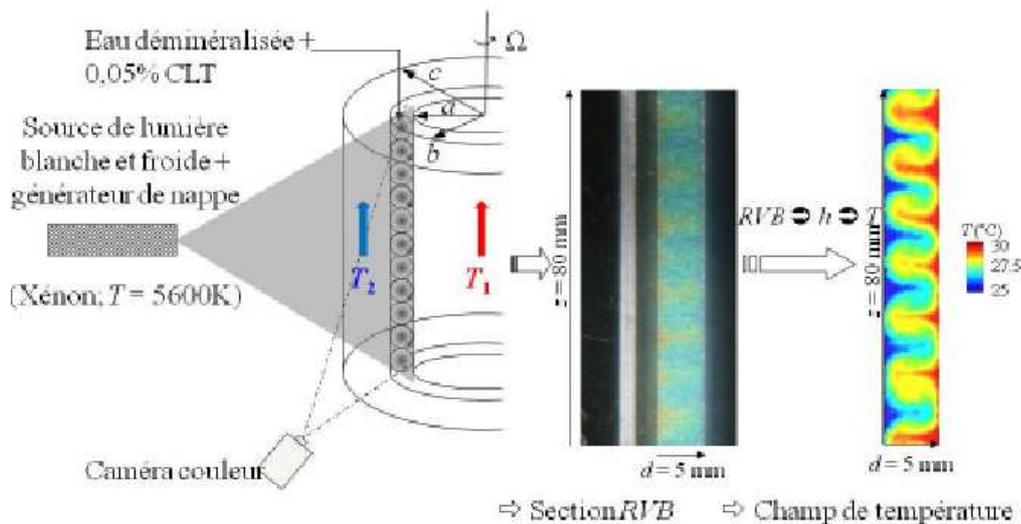


Fig. 1. Dispositif expérimental avec le système d'acquisition de la température utilisant les cristaux liquides thermochromiques.

Pour visualiser les champs de température du liquide dans l'entrefer, nous avons utilisé une méthode non intrusive de thermographie par cristaux liquides. Celle-ci est basée sur la diffusion sélective de la lumière par des cristaux cholestériques dans lesquels les molécules sont regroupées par couches. Dans chaque couche, les molécules tendent vers un alignement parallèle à un axe commun décrit par un vecteur unitaire appelé le directeur. En passant d'une couche à l'autre, le directeur tourne d'un petit angle de telle sorte qu'une structure spiralée avec un certain pas p soit formée. Lorsqu'elle est éclairée par de la lumière blanche, cette structure réfléchit la lumière suivant la condition de Wolf-Bragg (dans le cas d'une incidence normale de la lumière, la longueur d'onde avec le maximum d'intensité de réflexion λ_0 est approximativement égale au pas de la spirale). Pour la plupart des cristaux liquides cholestériques, le pas de la spirale est compris entre 400 et 1000 nm et λ_0 se trouve dans le domaine du visible. Une action extérieure telle qu'un changement de température modifie p , ce qui induit un changement de la longueur d'onde préférentiellement réfléchie, donc de la couleur des cristaux. La dépendance de la couleur des cristaux liquides cholestériques avec la température permet donc d'obtenir une image du champ de température dans le système étudié. Les cristaux liquides thermochromiques utilisés sont de type SR25C5W de chez Hallcrest. La température de la première transition (du noir au rouge) est de 25°C et ils fonctionnent sur une gamme de 5°C. Ils sont microencapsulés dans des sphères de diamètre moyen 75 μm et leur temps de réaction à un changement de température est de l'ordre de 3 ms. Nous avons ensemencé l'eau déminéralisée de 0,05% en volume de CLT en nous assurant par des mesures de viscosité que ce dosage ne modifiait pas les propriétés newtoniennes du liquide. Un étalonnage des cristaux a été réalisé et nous avons choisi l'angle de hue h , défini dans un espace de chromaticité polaire par les intensités des primaires Rouges, Vertes et Bleues (les valeurs RVB) enregistrées par le système d'acquisition, comme scalaire mesurable associé à la couleur observée en fonction de la température [9,10]. Nous avons donc tracé h en fonction de la température et dans ce qui suit, les températures ont été obtenues à partir de h avec un polynôme d'ordre 4, calculé à partir de la courbe d'étalonnage. Compte tenu de la précision des cristaux, de leur temps de réaction et de la précision sur les bains thermostatés, l'incertitude de mesure a été évaluée à environ $\pm 0,3^\circ\text{C}$. Les mesures des composantes v_r et v_z de la vitesse ont été effectuées en utilisant les CLT comme traceurs pour de la vélocimétrie par images de particules.

Les expériences ont été réalisées en appliquant un gradient radial de température entre les cylindres en chauffant le cylindre intérieur à une température $T_1 > T_2$. Après une heure, le cylindre intérieur est progressivement mis en rotation par pas réguliers. Pour chaque valeur de la vitesse angulaire, les mesures de la température et de la vitesse sont effectuées après vingt minutes. Dans la gamme de valeurs de température utilisée, l'eau déminéralisée a un nombre de Prandtl $Pr = 5,5 \pm 0,2$.

3 Résultats

Le gradient radial de température génère un écoulement barocline prenant la forme d'une large cellule convective. L'écoulement ainsi formé sans rotation peut se déstabiliser lorsque le nombre de Grashof est augmenté au-dessus d'une valeur critique $Gr_c = 8010$ dans notre système. Lorsque le cylindre intérieur est mis en rotation pour une valeur donnée du nombre de Grashof inférieure à Gr_c , l'écoulement de base est alors composé de la cellule convective et de l'écoulement de Couette circulaire. Cet écoulement peut lui aussi se déstabiliser lorsque le nombre de Taylor est augmenté au-dessus d'une valeur critique Ta_c qui dépend du nombre de Grashof (Fig. 2) : Ta_c diminue puis atteint une valeur constante pour les grands nombres de Grashof correspondant aux forts gradients de température qui nous intéressent ici.

Aucune hystérésis n'a été observé pour cette transition et le motif qui se forme dans ce cas est une spirale modulée qui remplit presque entièrement la longueur du système et tourne à la vitesse angulaire moyenne de l'écoulement. Sur un diagramme spatio-temporel de l'intensité lumineuse enregistrée le long de l'axe des cylindres (Fig. 3a), cela se traduit par un motif d'onde propagative. Les champs de vitesse, de vorticité et de température correspondant sont présentés sur les figures 3b et c. Ils révèlent la nature ondulatoire de ce motif.

Nous avons mesuré la vitesse de groupe v_g (Fig. 4a) et la vitesse de phase v_s (Fig. 4b) verticales de ce motif. Elles sont égales et varient linéairement avec le nombre de Grashof. Cette spirale modulée présente donc une forme de paquet d'onde se propageant sans dispersion. Nous avons procédé à un changement

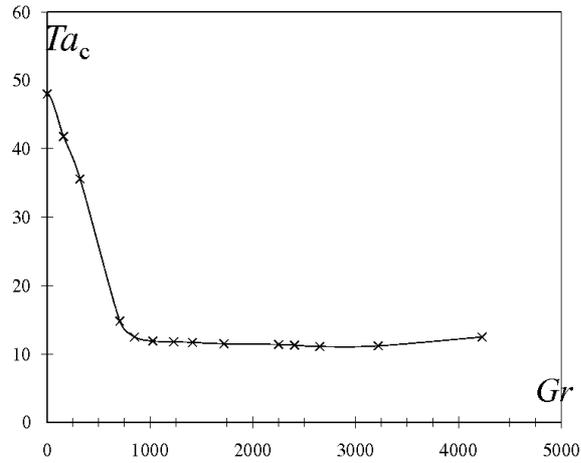


Fig. 2. Diagramme de stabilité $Ta_c = f(Gr)$.

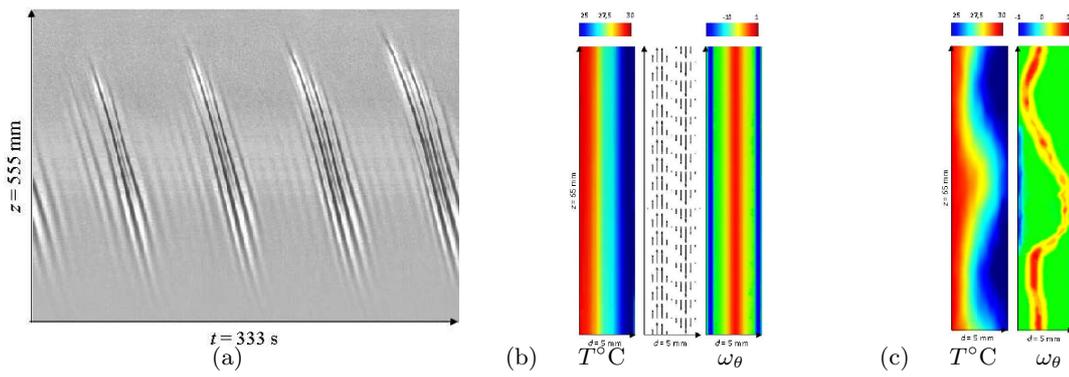


Fig. 3. Diagramme spatio-temporel (a), champs de vitesse, de température et de vorticité sans (b) et avec motif (c) obtenus pour $Gr = 2405$ et $Ta = 11,3$.

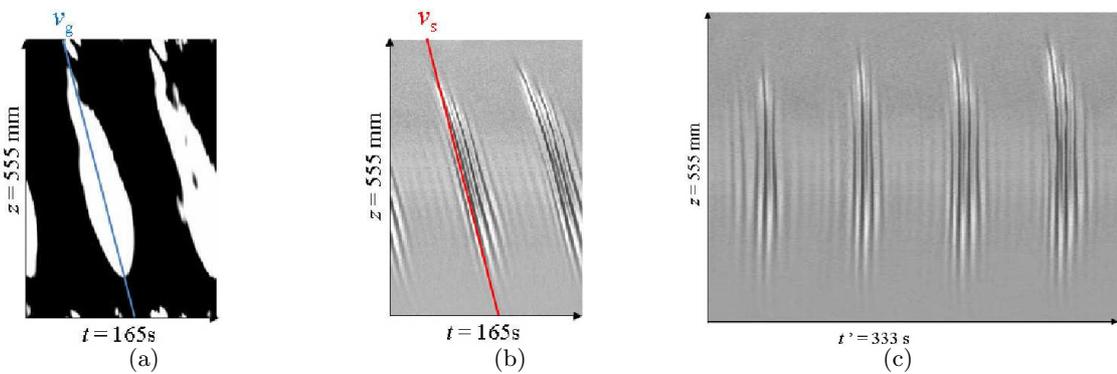
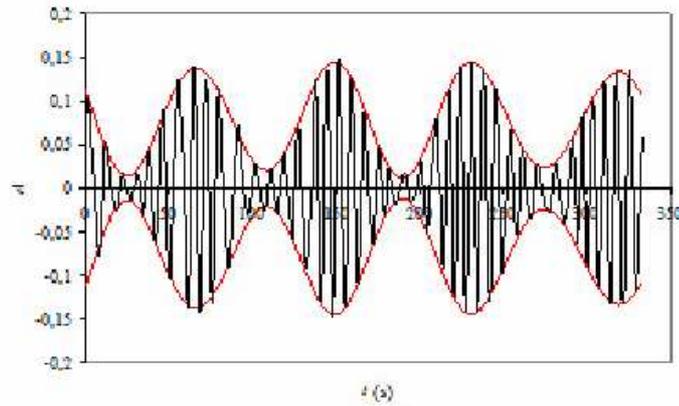
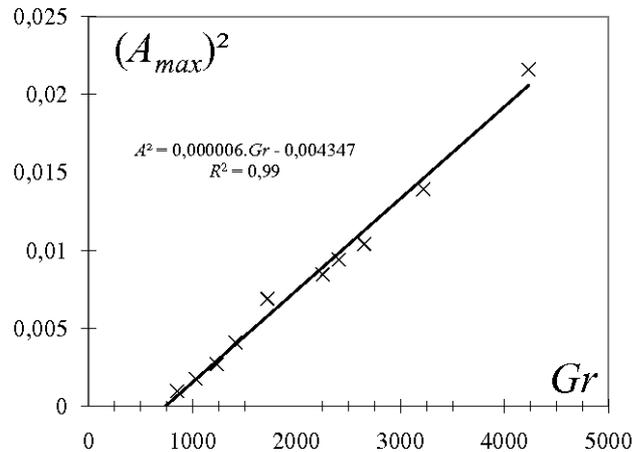


Fig. 4. Diagrammes spatio-temporels du module de l'intensité lumineuse (a), de l'intensité lumineuse (b) et obtenu par le changement de référentiel $t' = t + z/v_s$ pour $Gr = 2405$ et $Ta = 11,3$.

de référentiel pour les diagrammes spatio-temporels avec $t' = t + z/v_s$ où v_s correspond naturellement à la vitesse de propagation axiale du motif. On obtient alors des diagrammes spatio-temporels comme celui de la figure 4(c), obtenu à partir de celui de la figure 3(a), où le motif devient uniforme en z . Une moyenne en espace, nous a ensuite permis d'en déduire des séries temporelles comme celle de la figure 5(a) dont l'enveloppe $A(t)$ tracée en rouge peut être convenablement ajustée par une équation de la forme : $A(t) = A_{max} \cdot \text{sech}[(t - t_{max})/T_{mod}]$ où A_{max} est le maximum de l'amplitude d'un paquet, t_{max} l'instant auquel se trouve ce maximum et T_{mod} la période de modulation correspondant à la durée d'un paquet. Il s'agit d'une solution de l'équation de Schrödinger non linéaire appartenant à la famille des solitons enveloppe.



(a) Moyenne axiale de l'amplitude de l'intensité lumineuse



(b) Variation du carré de l'amplitude maximale moyenne

Fig. 5. Moyenne axiale de l'amplitude de l'intensité lumineuse obtenue à partir du diagramme spatio-temporel (z, t') de la figure 4c pour $Gr = 2405$ et $Ta = 11,3$ (a). Variation du carré de l'amplitude maximale moyenne des paquets en fonction du nombre de Grashof (b).

Nous avons répété ces opérations pour tous les diagrammes spatio-temporels obtenus au seuil de la première instabilité quand une modulation est observée. Le même ajustement a pu être appliqué à l'enveloppe des séries temporelles ainsi obtenues. Le carré du maximum de l'amplitude moyenne des paquets de chaque série est représenté en fonction du nombre de Grashof sur la figure 5(b). A_{max}^2 augmente linéairement avec Gr . Cela suggère une bifurcation supercritique vers l'onde modulée lorsqu'on

augmente le nombre de Grashof. L'extrapolation de la droite d'ajustement de A_{max}^2 en fonction de Gr donne un seuil d'apparition de la spirale modulée pour $Gr = 751$. Cette valeur correspond au point où le nombre de Taylor critique devient constant dans le diagramme de stabilité (Fig. 2).

4 Conclusion

Nous avons étudié l'écoulement lié au couplage de la force centrifuge et des effets thermiques dans un système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient radial de température. Dans ce cas, l'écoulement de base composé d'une large cellule convective et de l'écoulement de Couette circulaire, est remplacé par une spirale modulée présente sur toute la longueur du système et tournant à la vitesse angulaire moyenne de l'écoulement, lorsqu'il est déstabilisé. Une nouvelle technique de mesure non-intrusive de la température et de la vitesse basée sur l'utilisation de cristaux liquides thermochromiques, nous a permis de révéler la nature ondulatoire de cette spirale. Nous avons montré que ce motif peut être décrit comme un ensemble de paquets dont nous avons étudié l'enveloppe. Il apparaît alors que celle-ci peut être modélisée sous la forme d'une solution d'onde solitaire de l'équation nonlinéaire de Schrödinger. La variation linéaire du carré de l'amplitude maximale moyenne des paquets avec le nombre de Grashof, nous a permis de montrer que ce motif d'onde modulée apparaît via une bifurcation supercritique quand on augmente le nombre de Grashof au dessus d'une valeur conforme à ce que laissait supposer la forme du diagramme de stabilité.

Références

1. G. I. TAYLOR Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders *Philosophical Transaction of the Royal Society of London A*, 223-289 (1923).
2. R. TAGG, The Couette-Taylor problem, *Nonlinear Science Today* **4** (3), 1-25, 1994.
3. J.R. Donnelly Taylor Couette flow : the early days, *Physics today*, **44** (11), 32-39 (1991).
4. H. A. SNYDER & S. K. F. KARLSSON Experiments on the stability of Couette motion with a radial thermal gradient, *Physics of Fluids*, **7**, 1696-1706 (1964).
5. K. S. BALL & B. FAROUK Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow with buoyancy effects *Journal of Fluid Mechanics*, **197**, 479-501 (1988).
6. M. ALI & P.D. WEIDMAN, On the stability of circular Couette flow with radial heating *Journal of Fluid Mechanics* **220**, 53-84 (1990).
7. J. Y. KUO & K. S. BALL, Taylor-Couette flow with buoyancy : Onset of spiral flow, *Physics of Fluids*, **9**, 2872-2884 (1997).
8. V. LEPILLER, A. GOHARZADEH, A. PRIGENT & I. MUTABAZI, Weak temperature gradient effect on the stability of the circular Couette flow *European Physics Journal B*, **61**, 479-501 (2008).
9. N. AKINO, T. KUNUGI, M. UEDA & A. KUROSAWA, Liquid crystal thermometry based on automatic colour evaluation and applications to measure turbulent heat transfer, in *Transport phenomena in turbulent flows* (New York : Hemisphere), pp. 807-827 (1989).
10. J. L. HAY, D. K. HOLLINGSWORTH, Calibration of micro-encapsulated liquid crystals using hue angle and a dimensionless temperature, *Experimental Thermal and Fluid Science*, **18**, 251-257 (1998).