

# Trafic de gouttes à une jonction

David A. Sessoms, Laurent Courbin, & Pascal Panizza & Axelle Amon

Institut de Physique de Rennes, UMR 6251, Campus de Beaulieu, Université de Rennes 1, 35042 Rennes, France  
 axelle.amon@univ-rennes1.fr

**Résumé.** Nous présentons une étude numérique, théorique et expérimentale de la répartition de gouttes à l'entrée d'une boucle asymétrique. Nous observons et prédisons des motifs périodiques de répartition. De la multistabilité entre motifs expérimentaux est également observée et expliquée en tenant compte du bruit inhérent aux expériences.

**Abstract.** We investigate numerically, theoretically and experimentally droplet repartition at the inlet of an asymmetric loop. We observe and predict peridodicals patterns of droplets repartition. Multistability between experimental patterns is also observed and rationalized by taking into account noise that is intrinsic in experiments.

## 1 Introduction

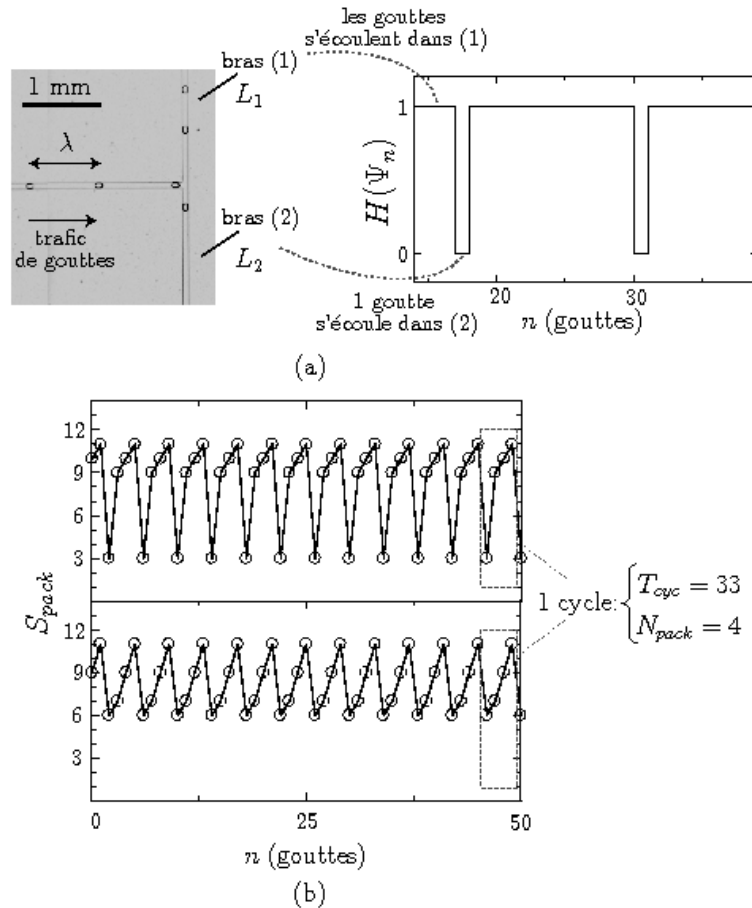
De nombreux domaines mettent en jeu la circulation d'éléments discrets dans des réseaux, comme par exemple la circulation sanguine [1] ou les écoulements de dispersions de gouttes (industrie du pétrole et microfluidique [2]). Comprendre et maîtriser ces écoulements sur l'ensemble d'un réseau nécessite tout d'abord une description du mode de répartition des éléments à une simple jonction. Dans le cas d'écoulements dilués de gouttes en microfluidique, la règle de répartition est particulièrement simple : entre plusieurs canaux accessibles, une goutte choisira celui qui possède la plus faible résistance hydrodynamique.

Dans ce cadre, nous nous intéressons à la dynamique de répartition d'un train de gouttes arrivant à l'entrée d'une boucle asymétrique. Expérimentalement et numériquement, une succession de régimes périodiques et apériodiques ont été observés avec des motifs de répartition des gouttes difficilement prédictibles [2]. La complexité de ce système réside dans le fait que les variables dépendent de toutes les gouttes présentes à cet instant dans la boucle [3] : le problème rentre donc dans la classe des systèmes à retard. Nous proposons ici un modèle conduisant à une dynamique discrète d'une variable binaire, le choix du bras par la goutte à la jonction. Il s'agit donc d'un système discret gouverné par une règle itérative simple, une caractéristique des automates cellulaires. L'étude numérique de ce modèle nous permet de caractériser par deux quantités invariantes les régimes observables. Notre modèle permet de trouver les règles gouvernant la sélection de ces quantités invariantes et les évolutions de ces dernières avec les paramètres physiques du système. Les prédictions théoriques donnent une description complète des résultats numériques. Nous avons confirmé la pertinence du modèle par une étude expérimentale, et avons ainsi pu montrer que certains régimes apériodiques observés résultent de la multistabilité de différents régimes possédant les mêmes invariants.

## 2 Présentation du système, modélisation

Dans notre système (Fig. 1a), un train périodique de gouttes monodisperses arrive à l'entrée d'une boucle formée de deux bras de même section et de longueurs  $L_1$  et  $L_2$  tels que  $\Lambda = L_2/L_1 > 1$ . Les gouttes sont émises à une période constante  $\tau$  alors que la distance  $\lambda$  entre les gouttes, et donc la vitesse  $v = \lambda/\tau$  peut varier. Dans le régime que nous considérons, lorsqu'une goutte arrive à la jonction, seules les résistances hydrodynamiques des bras accessibles entrent en jeu : la goutte choisit le bras de résistance

hydrodynamique la plus faible [3]. Or il a été montré que la résistance hydrodynamique d'un bras varie avec le nombre de gouttes qu'il contient de manière affine [4] : la résistance hydrodynamique du bras, de longueur  $L$  et contenant  $N$  gouttes, est proportionnelle à  $L + NL_d$  où  $L_d$  est une longueur caractérisant l'accroissement de la résistance hydrodynamique liée à la présence d'une goutte.



**Fig. 1.** (a) A gauche : zoom sur la jonction en T de notre dispositif microfluidique définissant les variables utilisées dans nos études numériques et expérimentales de trafic de gouttes :  $\lambda$ ,  $L_1$  et  $L_2 > L_1$ . A droite : évolution typique du signal numérique binaire  $H(\Psi_n)$  en fonction du numéro  $n$  de la goutte s'écoulant. Chaque 1 et 0 correspond respectivement à une goutte passant dans le bras (1) et un "trou" présent dans le bras (1), *i.e.* une goutte passant dans le bras (2). (b) Pour des valeurs données de  $L_d = 2.7$ ,  $\lambda = 8.2$ ,  $L_1 = 100$ , and  $L_2 = 150$ ,  $S_{pack}$  dépend fortement des conditions initiales : le bras (2) est initialement vide et le bras (1) est rempli de gouttes (signal du haut), ou contient des gouttes distantes de  $L_1/10$  (signal du bas).

Les grandes lignes de la réponse du système en fonction de  $\lambda$  peuvent alors aisément se comprendre : tant que l'écart entre les gouttes est grand, le bras court contient un faible nombre de gouttes et sa résistance hydrodynamique reste plus faible que celle du bras 2 vide. Toutes les gouttes arrivant à la jonction bifurquent alors vers le bras le plus court qui agit comme un filtre. Néanmoins, il existe une valeur seuil  $\lambda_f$  à partir de laquelle il y aura suffisamment de gouttes dans le bras court pour que la résistance hydrodynamique du bras long devienne plus faible que celle du bras court, entraînant une répartition des gouttes entre les deux bras et donnant alors lieu à des motifs de répartition de plus en plus complexes lorsque  $\lambda$  diminue.

Il a été montré récemment [3] que la vitesse des gouttes dans le bras ( $i$ ) dépendait des  $N_i$  gouttes déjà présentes dans ce bras selon  $v_i = (1 - \frac{L_i + N_i L_d}{L})v$  où  $L = L_1 + L_2 + (N_1 + N_2)L_d$ . D'autre part, une fois les transitoires passés, une étude expérimentale et théorique de type champ moyen a montré que le débit tend à se répartir uniformément entre les deux bras [3], c'est à dire que les vitesses dans chaque bras valent en moyenne  $v/2$ , les fluctuations étant d'autant plus faibles que les longueurs des bras sont grands devant  $L_d$ . Nous étudions le système dans cette limite où les fluctuations sont négligeables, *i.e.*  $v_i = v/2$ . Les déplacements des gouttes dans chaque bras sont synchronisés, il y a alors une équivalence entre le temps et l'espace et ces deux quantités sont donc quantifiées. Lorsqu'on s'intéresse à la répartition des gouttes à chaque multiple entier du temps  $\tau$ , qui sera l'unité de temps de toutes les quantités temporelles dans la suite, les positions prises sont contraintes à être des multiples de  $\lambda/2$ . Il y a donc un nombre fini de configurations possibles pour le système et la dynamique étant déterministe, le système est donc forcément périodique.

### 3 Etude numérique, invariants

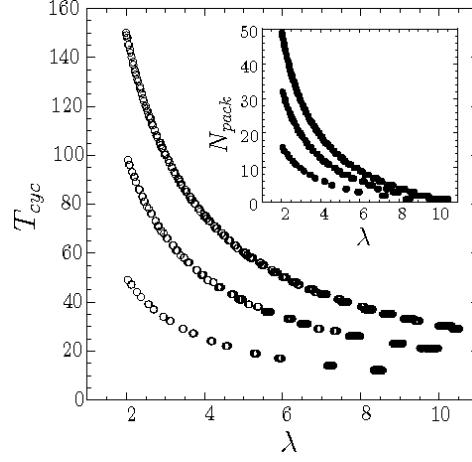
Nous avons mené une étude numérique de façon systématique dans cette limite [5]. La variable considérée  $S_n$  correspond au choix de la goutte arrivant à la jonction au temps  $n$  : 1 si la goutte va dans le bras court, 0 si la goutte va dans le bras long (Fig. 1a). L'algorithme gouvernant la dynamique est alors le suivant : (1) juste avant d'injecter une nouvelle goutte, le nombre de gouttes  $N_1(n)$  et  $N_2(n)$  présentes dans chaque bras est calculé, ainsi que la différence normalisée des résistances hydrodynamiques :  $\Psi_n = (L_2 - L_1)/L_d + N_2(n) - N_1(n)$ ; (2) la nouvelle goutte est injectée :  $S_n = H(\Psi_n)$  où  $H$  est la fonction de Heaviside; (3) toutes les gouttes sont translatées de  $\lambda/2$ , certaines gouttes sortant éventuellement de chaque bras. Une goutte reste dans le bras  $i$  le temps  $T_i^* = \frac{2L_i}{\lambda}$  correspondant à un nombre d'itérations  $T_i = \text{ceil}(\frac{2L_i}{\lambda})$ . Le nombre de gouttes consécutives passant dans le bras court (nombre de 1 consécutifs dans la suite des  $S_n$ ) est appelé *paquet*. Un nouveau signal  $S_{pack}$  peut être déduit de  $S_n$ , correspondant aux valeurs successives des paquets.

La figure 1b montre des signaux typiques  $S_{pack}$  calculés. Ceux-ci sont périodiques comme attendu. Suivant la condition initiale choisie pour la simulation (positions et nombre de gouttes déjà présentes dans chaque bras au lancement d'une simulation), différents motifs de répartition des gouttes peuvent être observés. Néanmoins deux quantités sont toujours conservées à paramètres fixés quelque soit les conditions initiales : la période  $T_{cyc}$  et le nombre de paquets dans un cycle  $N_{pack}$  (Fig. 1b). Ces deux invariants peuvent donc être utilisés pour caractériser la dynamique du système à paramètres donnés. On note qu'une troisième quantité peut être construite à partir de ces deux dernières :  $T_{cyc}/N_{pack}$  qui est la probabilité qu'une goutte aille dans le bras long.

L'étude des valeurs de  $T_{cyc}$  et  $N_{pack}$  en fonction de  $\lambda$  est présenté sur la figure 2. Des figures similaires ont été obtenues pour d'autres valeurs de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $A$ . Les deux invariants peuvent prendre des valeurs situées sur trois branches. Dans le cas des périodes, on constate que les valeurs de la période possibles sont  $T_1$ ,  $T_2$  ou  $T_2 - T_1$  [5]. Le mode de répartition sur ces trois branches semble complexe : les deux invariants sont constants pour un intervalle de valeurs du paramètre plus ou moins large puis commutent ensemble sur une des autres branches. Lorsque  $\lambda$  diminue la densité des transitions entre les branches et les deux invariants augmentent, caractérisant des motifs de plus en plus complexes.

### 4 Etude théorique, règles de sélection

Nous avons pu déduire du modèle les valeurs des deux invariants en régime permanent. En premier lieu, la différence  $N_1 - N_2$ , partie variable de  $\Psi_n$ , n'a que deux valeurs possibles en régime permanent :  $\text{floor}(\frac{L_2 - L_1}{L_d})$  ou  $\text{ceil}(\frac{L_2 - L_1}{L_d})$ . En effet  $\Psi_n$  prend alors les valeurs les plus proches de 0 pour la différence des résistances hydrodynamiques compte tenu de la quantification du système. Dans le cas où  $N_1 - N_2$  reste constant, le régime obtenu correspond à avoir à la fois  $N_1$  et  $N_2$  constants, il est alors facile de montrer que la période est forcément  $T_2 - T_1$ . En général  $N_1 - N_2$  n'est pas constant, c'est à dire que  $N_1$  et  $N_2$  ne peuvent pas être simultanément constants au cours d'un cycle. Lorsque  $N_1$  est constant, la période est  $T_1$



**Fig. 2.** Diagramme de bifurcation numérique de  $T_{cyc}$  et  $N_{pack}$  (en insert) en fonction de  $\lambda$  pour  $L_1 = 100$ ,  $L_2 = 150$  et  $L_d = 2.7$ . La valeur de  $\lambda_f$  est 10.5.

et  $N_2$  oscille entre deux valeurs consécutives. Lorsque  $N_2$  est constant, la période est  $T_2$  et  $N_1$  oscille entre deux valeurs consécutives. Seuls ces trois régimes sont observés en régime permanent. Ils correspondent aux plus petites fluctuations possibles au cours du temps de toutes ces quantités discrètes [5].

Lorsqu'on s'intéresse à la dynamique du système pour différentes valeurs de  $\lambda$ , la première bifurcation est le passage du régime *filtre*, dans lequel toutes les gouttes passent dans le bras court, au régime de *répartition*, dans lequel les gouttes se répartissent entre les deux bras. Cette bifurcation se produit lorsque la résistance hydrodynamique du bras court rempli de gouttes dépasse la résistance hydrodynamique du bras long vide :

$$L_2 < L_1 + \text{floor} \left( \frac{2L_1}{\lambda} \right) L_d \quad (1)$$

Cette inégalité conduit à la valeur critique

$$\lambda_f = \frac{2L_1}{\text{floor} \left( \frac{L_2 - L_1}{L_d} \right) + 1}. \quad (2)$$

Lorsque  $\lambda < \lambda_f$ , il reste un nombre de gouttes

$$M = \text{ceil} \left( \frac{2L_1}{\lambda} \right) - \text{floor} \left( \frac{L_2 - L_1}{L_d} \right) \quad (3)$$

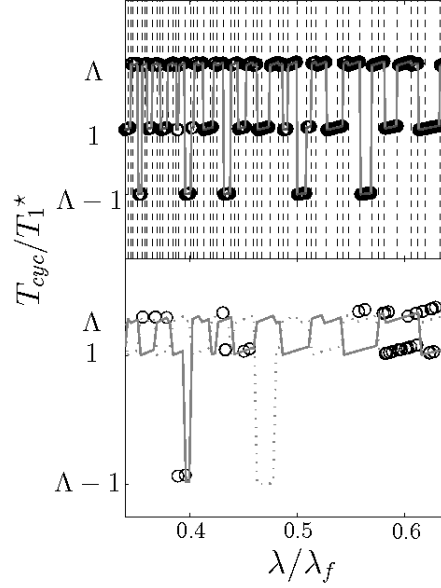
à répartir entre les deux bras pour équilibrer les résistances hydrodynamiques une fois la différence de longueur compensée. Soit  $N_1^H$  le nombre de *trous* dans le bras 1, c'est à dire le nombre de gouttes "manquantes" par rapport à une situation où toutes les gouttes passent par le bras 1. Nous utilisons d'autre part les notations suivantes :  $p = \frac{T_1}{T_1 + T_2}$ ,  $q = \frac{T_2}{T_1 + T_2}$ ,  $\epsilon_p$  partie fractionnaire de  $pM$  et  $\epsilon_q$  partie fractionnaire de  $qM$ . Les règles gouvernant les invariants correspondent à quatre configurations possibles pour les valeurs de ces parties fractionnaires [5] : (i) si  $\epsilon_p = \epsilon_q = 0$  alors  $pM$  et  $qM$  sont des entiers qui donnent les valeurs de  $N_1^H$  et  $N_2$  respectivement, alors tout deux constants,  $T_{cyc} = T_2 - T_1$  et  $N_{pack} = (q - p)M$ ; (ii)  $\epsilon_p = p$  et  $\epsilon_q = q$ , alors  $p(M - 1)$  et  $q(M - 1)$  sont des entiers qui donnent les valeurs de  $N_1^H$  et  $N_2$  respectivement,  $T_{cyc} = T_2 - T_1$  et  $N_{pack} = (q - p)(M - 1)$ ; (iii)  $0 < \epsilon_p < p$  et  $q < \epsilon_q < 1$ ,  $N_1^H$  est constant et égal à la partie entière de  $pM$ ,  $T_{cyc} = T_1$  et  $N_{pack} = N_1^H$ ; (iv)  $p < \epsilon_p < 1$  et  $0 < \epsilon_q < q$ ,  $N_2$  est constant et égal à la partie entière de  $qM$ ,  $T_{cyc} = T_2$  et  $N_{pack} = N_2$ .

La figure 3 montre une superposition des prédictions théoriques et des calculs numériques montrant que les règles ci-dessus décrivent parfaitement le mode de sélection des invariants. Les valeurs de  $\lambda$  pour

lesquelles un changement de régime est attendu correspondent à des changements de valeurs des quantités  $M$ ,  $p$  et  $q$  et peuvent être écrites de manière condensée :

$$\lambda_c(i, k) = \frac{2L_i}{\text{floor}(\frac{L_2 - L_1}{L_d}) + k}. \quad (4)$$

Les prédictions liées à cette expression sont indiquées sur la figure par des lignes verticales pointillées.



**Fig. 3.** Diagrammes de bifurcation numérique (en haut) et expérimental (en bas) de  $T_{cyc}/T_1^*$  en fonction de  $\lambda/\lambda_f$  dans la région  $\lambda/\lambda_f = 0.35 - 0.65$ . Dans les deux cas, les trois branches correspondent à  $T_{cyc}$  égal à  $T_2$ , à  $T_1$ , et à  $T_2 - T_1$ . La ligne grise correspond aux prédictions des règles de sélection et les lignes verticales pointillées à l'équation 4. Les lignes grises présentes sur les résultats expérimentaux correspondent à nos prédictions théoriques et mettent en évidence la forte dépendance des bifurcations vis à vis de  $L_d$ , (ligne continue)  $L_d=305\mu\text{m}$  et (ligne en tiret)  $L_d=331\mu\text{m}$ .

## 5 Etude expérimentale, multistabilité

Afin de confirmer la pertinence de nos résultats, nous avons mené une étude expérimentale sur un système microfluidique. Un train de gouttes monodisperses d'eau dans l'huile est généré. La dilution de ce train permet de contrôler la distance entre les gouttes  $\lambda$  tout en gardant leur volume constant. Cette distance est toujours suffisamment grande pour qu'il n'y ait pas d'interactions entre les gouttes et pas de collisions entre les gouttes successives arrivant à une jonction [3]. La boucle est constituée de deux bras de longueurs  $L_1 = 1.531$  cm et  $L_2 = 1.837$  cm ( $\Lambda = 1.2$ ) et de même section rectangulaire. Les longueurs des bras ont été choisies suffisamment longues pour que les fluctuations des vitesses dans les bras soient faibles, ce qui a été vérifié expérimentalement, afin de travailler dans la limite explorée numériquement. Une caméra rapide (1000 fps) filme l'entrée de la boucle (Fig. 1a à gauche) et un programme d'analyse d'image extrait le signal  $S_n$  (Fig. 1a à droite) identique à la variable de la simulation et dont on peut déduire le signal  $S_{pack}$ .

Des réponses périodiques sur une centaine de gouttes sont observés. Sur des durées plus longues, de l'ordre du millier de gouttes, la configuration du régime change en gardant la même période  $T_{cyc}$

et le même nombre de paquets  $N_{pack}$  [5]. Les valeurs de  $T_{cyc}$  observées pour différentes valeurs de  $\lambda$  sont regroupées sur la figure 3. Les grandes caractéristiques de nos prédictions sont bien retrouvées expérimentalement : nous observons trois branches correspondant à des périodes égales à  $T_2$ , à  $T_1$ , et à  $T_2 - T_1$ . Les deux lignes correspondent aux prédictions théoriques pour différentes valeurs de  $L_d$  montrant la sensibilité des positions des bifurcations aux fluctuations de ce paramètre.

La succession de régimes périodiques de configurations différentes mais de même invariants a été reproduite numériquement en prenant en compte un terme de bruit inhérent aux expériences et de l'ordre de 2% sur  $\lambda$  ou  $L_d$ , dans les simulations. En effet, nous avons vu que la configuration en régime stationnaire à paramètres fixes dépend des conditions initiales choisies, si bien qu'il existe plusieurs attracteurs partageant les mêmes invariants pour un jeu de paramètres donnés. En ajoutant des fluctuations, on peut reproduire numériquement le passage d'un attracteur à un autre. Ce type de régime correspond aux observations expérimentales.

## 6 Conclusion

Nous avons présenté une étude numérique, théorique et expérimentale d'un système correspondant à la répartition d'objets discrets à un noeud. Notre système est naturellement quantifié et nous avons montré qu'en se plaçant dans certaines limites il est complètement soluble. Ce système est donc à la fois d'une certaine simplicité tout en gardant la dynamique riche et complexe des systèmes de même nature, tout particulièrement les régimes oscillants et la multistabilité, qui sont des caractéristiques des systèmes à retard. Le modèle décrit une situation expérimentale d'intérêt technologique, compte tenu de l'importance que prend actuellement la microfluidique, mais peut être aussi vu comme un système expérimental modèle.

Les études complémentaires en cours montrent qu'en tenant compte du couplage entre les gouttes présentes dans les bras et les vitesses, notre modèle décrit bien le système sur les plateaux du diagramme de bifurcation. En revanche, à proximité des bifurcations, de nouveaux régimes de périodes beaucoup plus longues que les temps de parcours des bras apparaissent ainsi que des régimes qui semblent aperiodiques. Nous avons aussi commencer à étudier des configurations plus complexes telles qu'une jonction à trois bras. Nous avons observé numériquement l'émergence de régimes complexes de périodes longues devant les temps de parcours des bras.

## Références

1. R. T. CARR AND M. LACOIN, Nonlinear Dynamics of Microvascular Blood Flow, *Annals of Biomedical Engineering*, **28**, 641-652 (2000).
2. M. J. FUERSTMAN, P. GARSTECKI AND G. M. WHITESIDES, Coding/Decoding and Reversibility of Droplet Trains in Microfluidic Networks, *Science*, **315**, 828-832 (2007).
3. D. A. SESSOMS, M. BELLOUL, W. ENGL, M. ROCHE, L. COURBIN AND P. PANIZZA, Droplet motion in microfluidic networks : Hydrodynamic interactions and pressure-drop measurements, *Physical Review E*, **80**, 016317 (2009).
4. W. ENGL, M. ROCHE, A. COLIN, P. PANIZZA AND A. AJDARI, Droplet Traffic at a Simple Junction at Low Capillary Numbers, *Physical Review Letters*, **95**, 208304 (2005).
5. D. A. SESSOMS, A. AMON, L. COURBIN AND P. PANIZZA, Complex dynamics of droplet traffic in microfluidic networks : periodicity, multistability and selection rules, *soumis à Physical Review Letters*.