

# Thermalisation anormale d'ondes unidimensionnelles

Pierre Suret<sup>1</sup>, Antonio Picozzi<sup>2</sup>, & Hans R. Jauslin<sup>2</sup> & Stéphane Randoux<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire PHLAM, bât. P5, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq

<sup>2</sup> Institut Carnot de Bourgogne, UMR 5029 CNRS-Université de Bourgogne, Dijon, France

[pierre.suret@univ-lille1.fr](mailto:pierre.suret@univ-lille1.fr)

**Résumé.** Nous décrivons, de manière expérimentale et théorique, un processus de thermalisation anormale d'ondes Hamiltoniennes non linéaires et uni-dimensionnelles. Il se caractérise par une évolution irréversible des ondes vers un état d'équilibre spécifique d'une nature fondamentalement différente de l'état d'équilibre thermodynamique attendu. Une approche cinétique du problème révèle que ce phénomène découle de l'existence d'un invariant local dans l'espace des fréquences. Une nouvelle famille de solutions d'équilibre est ainsi obtenue. Des expériences réalisées avec des ondes optiques fournissent une signature du transitoire de ce processus de thermalisation anormale.

**Abstract.** We report theoretically and experimentally a process of anomalous thermalization of one-dimensional nonlinear hamiltonian waves. It is characterized by an irreversible evolution of the waves towards a specific equilibrium state of a fundamental different nature than the expected thermodynamic equilibrium state. A kinetic approach of the problem reveals that this phenomenon is due to the existence of a *local invariant* in frequency space. A novel family of equilibrium distributions is obtained. Experiments performed with optical waves provide a signature of the transient process leading to this anomalous thermalization.

## 1 Introduction

La question de la thermalisation d'un système non linéaire Hamiltonien a été largement étudiée dans le cadre de la problématique de Fermi-Pasta-Ulam [1]. Réalisée en 1955, "l'expérience de Fermi-Pasta-Ulam" a consisté à étudier, à l'aide d'une simulation numérique, la répartition à long terme de l'énergie dans un système dynamique unidimensionnel de 64 masses couplées entre elles par des ressorts faiblement anharmoniques. Un seul mode de la chaîne d'oscillateur étant initialement excité, les auteurs de l'expérience s'attendaient à observer une « thermalisation approchée » du système perturbé par la faible anharmonicité, l'énergie se répartissant alors de façon approximativement égale sur les différents modes. Ils furent surpris de constater que cette thermalisation n'a pas lieu et que la dynamique du système demeure de nature quasi-périodique. L'expérience de Fermi-Pasta-Ulam a montré que la thermalisation n'est pas un scénario à caractère universel dans les systèmes non linéaires Hamiltonien. Ceci a conduit, quelques dizaines d'années plus tard, à la découverte du théorème KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) et à la formulation du concept de soliton [1].

Le phénomène de thermalisation a également été largement étudié dans les systèmes physiques Hamiltonien (gaz de Bose ultrafroids [2], ondes en optique non linéaire...) dont le comportement peut être décrit par l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS). La thermalisation d'un système d'ondes non linéaires se caractérise par l'évolution irréversible du spectre des ondes vers la distribution d'équilibre thermodynamique, i.e. le spectre de Rayleigh-Jeans (RJ) [3,4]. Nous décrivons ici un processus de thermalisation anormale apparaissant dans un système d'ondes unidimensionnel [5]. Il se caractérise par une évolution irréversible des ondes vers un état d'équilibre spécifique dont la nature est fondamentalement différente de l'état d'équilibre conventionnel de RJ. La théorie de turbulence d'ondes révèle que ce processus de thermalisation anormale est dû à l'existence d'un nouvel invariant dans l'espace des fréquences,  $J_\omega$ , lequel trouve son origine dans des résonances dégénérées du système non linéaire. Contrairement aux invariants intégraux conventionnels qui donnent lieu à une distribution de RJ généralisée, c'est ici la nature locale de l'invariant  $J_\omega$  qui confère une structure fondamentalement différente aux nouveaux états d'équilibre.

Des expériences réalisées avec des ondes optiques fournissent une signature du transitoire de ce processus de thermalisation anormale [5].

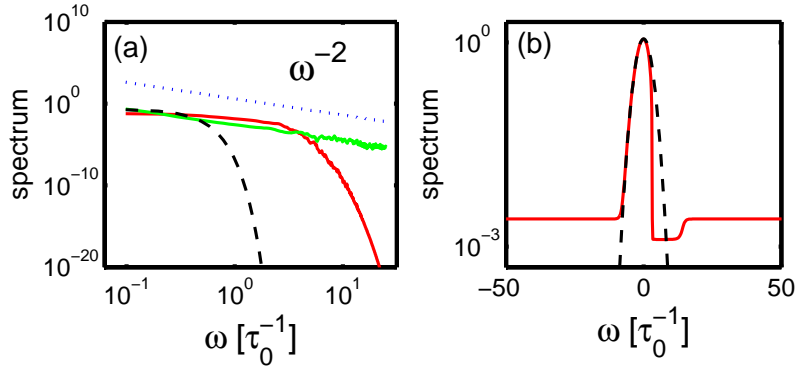
## 2 Théorie

Le premier modèle que nous considérons est l'équation NLS vectorielle qui décrit la propagation non linéaire d'ondes optiques [6] mais aussi les condensats de Bose-Einstein [7]

$$i\partial_z A_1 = -\partial_t^2 A_1 + (|A_1|^2 + \kappa|A_2|^2)A_1, \quad (1)$$

$$i\partial_z A_2 = -\eta\partial_t^2 A_2 + (|A_2|^2 + \kappa|A_1|^2)A_2. \quad (2)$$

$z$  représente la distance de propagation et  $t$  mesure le temps dans un référentiel accompagnant les ondes au cours de leur propagation [6]. Les échelles d'espace et de temps sont normalisées par rapport à la longueur non linéaire  $L_0 = 1/(\gamma e_0^2)$  et au temps  $\tau_0 = (\alpha_1 L_0)^{1/2}$ , où  $\gamma$  représente le coefficient non linéaire,  $\alpha_j$  étant les coefficients de dispersion de  $A_j$ , et  $e_0^2$  l'intensité moyenne de  $A_1$ . Avec ces unités,  $\eta$  désigne le rapport des coefficients de dispersion des deux ondes, et  $\kappa$  le rapport des coefficients de modulation de phase croisée et d'auto-modulation de phase. Les relations de dispersion de  $A_{1,2}$  s'écrivent  $k_1(\omega) = \omega^2$ ,  $k_2(\omega) = \eta\omega^2$ . Les Eqs.(1,2) conservent le nombre de particules (puissance)  $N_j = \int |A_j|^2 dt$  de chaque composante  $A_j$  et l'Hamiltonien  $H$  [6]. Notons que les Eqs.(1,2) sont intégrables pour  $\eta = \kappa = 1$  (ou  $\eta = \kappa = -1$ ) [8] mais que nous ne considérons ici que le cas non intégrable.



**Fig. 1.** (a) Spectre d'équilibre de  $A_1$  obtenu en résolvant numériquement les équations NLS (1,2) pour  $\eta = 1$  (trait plein noir),  $\eta = 1.1$  (trait plein gris) et les conditions initiales correspondantes (trait en pointillés noirs). La ligne de points montre la loi puissance d'équipartition d'énergie  $n_j^{R,J}(\omega) \sim \omega^{-2}$ . (b) Spectre d'équilibre local  $n^{loc}(\omega)$  (trait plein noir) associé à l'équation NLS scalaire (7). La courbe en pointillés noirs montre la condition initiale,  $\alpha = 0.1$ .

Le phénomène de thermalisation anormale peut d'abord être décrit de manière simple grâce à une simulation numérique des Eqs.(1,2). Les conditions initiales sont des ondes partiellement cohérentes ayant un spectre gaussien et des phases aléatoires. Les champs  $A_{1,2}(z = 0, t)$  sont alors de moyenne nulle et présentent une statistique Gaussienne stationnaire. Les simulations numériques révèlent qu'après un transitoire, les deux ondes atteignent un état (statistiquement) stationnaire dans lequel leurs spectres moyens n'évoluent plus au cours de la propagation. Ces états stationnaires sont de nature différente selon la valeur du coefficient de dispersion  $\eta$  apparaissant dans les Eqs.(1,2). Pour  $\eta \neq 1$ , on retrouve le processus de thermalisation conventionnel : les deux ondes évoluent irréversiblement vers le spectre de RJ, dont les ailes vérifient la propriété d'équipartition d'énergie (Fig. 1a) [3,4]. Toutefois, cette équipartition d'énergie n'est plus obtenue lorsque  $\eta = 1$ . Ceci est aussi illustré en Fig. 1a, où l'énergie dans le spectre,  $\epsilon_j(\omega) = k_j(\omega)n_j(\omega)$ , n'est plus également distribuée parmi les modes, de sorte que les spectres d'équilibre ne vérifient plus la loi puissance de RJ attendue,  $n_j(\omega) \sim k_j(\omega)^{-1} \sim \omega^{-2}$ .

Nous avons étudié cet effet de thermalisation anormale dans le cadre de la théorie de la turbulence d'ondes [3]. Cette théorie est basée sur une fermeture de la hiérarchie des équations pour les moments du champ, cette fermeture s'appuyant sur les propriétés de dispersion des ondes [3]. Cette théorie permet de dériver deux équations cinétiques couplées qui gouvernent les évolutions des spectres moyens des ondes  $n_j(\omega, z)$  ( $\langle a_j(\omega_1, z) a_j^*(\omega_2, z) \rangle = n_j(\omega_1, z) \delta(\omega_1 - \omega_2)$ ),  $a_j$  étant la transformée de Fourier de  $A_j$  [3] :

$$\partial_z n_j(\omega, z) = \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 W n_j(\omega) n_i(\omega_1) n_i(\omega_2) n_j(\omega_3) [n_j^{-1}(\omega) + n_i^{-1}(\omega_1) - n_i^{-1}(\omega_2) - n_j^{-1}(\omega_3)] \quad (3)$$

Les conditions de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement sont exprimées par des fonctions de Dirac dans  $W = 2\pi\kappa^2 \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \delta[k_j(\omega) + k_i(\omega_1) - k_i(\omega_2) - k_j(\omega_3)]$ . Les équations (3) conservent le nombre de quasi-particules  $N_j = \int n_j(\omega) d\omega$  de chaque champ  $A_j$  ainsi que l'énergie cinétique  $E = \sum_i E_i$ ,  $E_i = \int k_i(\omega) n_i(\omega) d\omega$ . Le caractère irréversible des Eq.(3) s'exprime par un théorème  $H$  de croissance d'entropie,  $dS/dz \geq 0$ , où  $S = \sum_i S_i$ ,  $S_i(z) = \int \log(n_i) d\omega$  est l'entropie hors-équilibre. Les spectres d'équilibre thermodynamique  $n_j^{RJ}(\omega)$  qui réalisent le maximum d'entropie de  $S[n_j]$ , étant données les contraintes de conservation de  $E$  et  $N_j$  sont les spectres de RJ

$$n_j^{RJ}(\omega) = T / [k_j(\omega) - \mu_j], \quad (4)$$

où  $T$  et  $\mu_j$  sont la température et le potentiel chimique de  $A_j$  [3,4]. Les ailes du spectre de RJ (4) vérifient la propriété d'équipartition d'énergie,  $n_j^{RJ} \sim \omega^{-2}$ . Ils ne permettent donc pas de décrire les spectres d'équilibre identifiés en Fig. 1a pour  $\eta = 1$ . Nous allons cependant voir que les équations cinétiques (3) donnent une description détaillée du processus de thermalisation anormale.

Comme  $\eta = 1$ , les fonctions de Dirac  $\delta$  des Eqs.(3) peuvent être utilisées pour calculer deux des trois intégrales. Les équations cinétiques couplées révèlent alors l'existence d'un nouvel invariant,  $J(\omega) = n_1(\omega, z) + n_2(\omega, z)$ , i.e.,  $\partial_z J_\omega = 0$ . Cet invariant est 'local' dans le sens où il est fixé pour chaque fréquence  $\omega$  prise individuellement. L'existence de cet invariant nous permet de dériver une équation fermée pour l'évolution de  $n_1$ ,

$$\partial_z n_1(\omega, z) = \frac{1}{2} \int \frac{\mathcal{G}[J, n_1]}{|\omega - \omega_1|} d\omega_1 \quad (5)$$

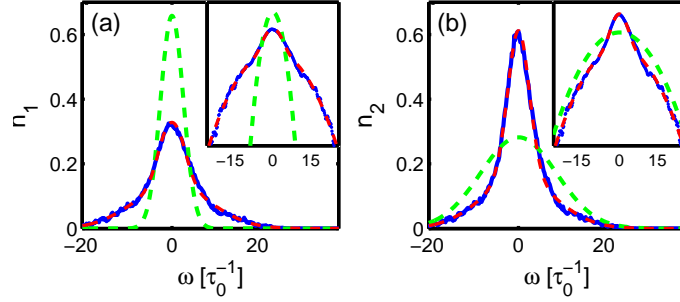
où  $\mathcal{G}[J, n_1] = [J_{\omega_1} - n_1(\omega_1)][J_\omega - n_1(\omega)][n_1(\omega_1) - n_1(\omega)] - n_1(\omega_1)n_1(\omega)[J_{\omega_1} - n_1(\omega_1) - J_\omega + n_1(\omega)]$ . Cette équation conserve  $N_1 = \int n_1(\omega, z) d\omega$  et présente un théorème  $H$  pour  $\mathcal{S}_{loc}(z) = \int \text{Log}\{n_1(\omega)[J_\omega - n_1(\omega)]\} d\omega$  (on notera que la conservation de l'énergie  $E$  et de la quantité de mouvement  $P$  est implicitement vérifiée *via* l'invariant  $J_\omega$ ). Le spectre d'équilibre 'local' qui réalise le maximum de  $\mathcal{S}_{loc}$  étant donnée la contrainte de conservation de  $N_1$  est obtenu en introduisant le paramètre de Lagrange  $\lambda$ ,

$$n_1^{loc}(\omega) = J_\omega/2 - \left[ \sqrt{1 + (\lambda J_\omega/2)^2} - 1 \right] / \lambda, \quad (6)$$

avec par ailleurs  $n_2^{loc}(\omega) = J_\omega - n_1^{loc}(\omega)$ . Cet état d'équilibre est une solution stationnaire de l'Eq.(5). Le paramètre  $\lambda$  est déterminé par la condition initiale à travers  $J_\omega : \int (\sqrt{1 + \lambda^2 J_\omega^2/4} - 1) d\omega = \lambda(N_2 - N_1)/2$ . Si  $N_1 = N_2$ , on obtient  $\lambda = 0$  et le spectre d'équilibre (6) se réduit à  $n_1^{loc}(\omega) = n_2^{loc}(\omega) = J_\omega/2$ . Dans la limite  $N_1 \gg N_2$  ( $N_1 \ll N_2$ ),  $\lambda \rightarrow -\infty$  ( $+\infty$ ), et  $n_1^{loc}(\omega) \rightarrow J_\omega$  ( $n_2^{loc}(\omega) \rightarrow J_\omega$ ). Ainsi, contrairement à la distribution d'équilibre thermodynamique (4), le spectre d'équilibre local (6) préserve une mémoire de la condition initiale *via* l'invariant  $J_\omega$ . La différence entre la nature locale de l'invariant  $J_\omega$  et les invariants intégraux conventionnels est brièvement discutée en Ref. [5].

Les simulations numériques des équations cinétiques Eq.(5) révèlent une évolution irréversible de  $n_1(z, \omega)$  vers l'état d'équilibre (6). Comme l'illustre la Figure 2, cet effet de thermalisation anormale a été aussi confirmé par intégration numérique des équations de NLS (1,2). On notera l'accord quantitatif entre les simulations numériques et la théorie [Eq.(6)] en l'absence de paramètres ajustables.

La famille d'états d'équilibre locaux (6) est paramétrée par la fonction  $J_\omega$  (i.e. pour chaque  $J_\omega$  on a un spectre  $n_j^{loc}(\omega)$  différent). Ainsi, un ensemble d'états d'équilibre distincts peut être atteint en



**Fig. 2.** Spectres d'équilibre obtenus en résolvant numériquement les Eqs.(1,2) confondus avec les états d'équilibre théoriques correspondants  $n^{loc}(\omega)$  données par Eq.(6) (traits pleins noirs). La ligne en traits pointillés montre les conditions initiales. Les encadrés montrent les mêmes courbes en échelle logarithmique. ( $\eta = 1, N_1/N_2 = 0.7$ , une moyenne sur  $10^5 L_0$  a été effectuée une fois l'état d'équilibre atteint,  $\partial_z \mathcal{S} \simeq 0$ ).

partant de conditions initiales différentes : de ce point de vue le système présente un comportement 'multistable'. La distribution de RJ appartient également à cette famille d'états d'équilibre locaux. Si  $J_\omega = n_1^{RJ}(\omega) + n_2^{RJ}(\omega)$  et  $\lambda = (\mu_2 - \mu_1)/T$ , l'équation (6) donne en effet  $n_j^{loc}(\omega) = n_j^{RJ}(\omega)$  pour  $\eta = 1$ . Ceci est consistant avec le fait que la distribution de RJ est associée à un maximum de  $\mathcal{S}$  sans la contrainte  $J_\omega = cte$ .

L'existence de l'invariant local  $J_\omega$  trouve son origine dans des résonances dégénérées du système : les conditions de résonance pour la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement exprimées par le terme  $W$  dans l'équation (3) présentent en effet la solution triviale  $\omega_{3,4} = \omega_{1,2}$  pour  $\eta = 1$ . Ce type de résonance dégénérée peut être rencontré dans de nombreux systèmes non linéaires. Nous avons en particulier pu les identifier dans l'interaction résonante à quatre ondes [5], ainsi que dans l'équation NLS scalaire, dont l'intégrabilité est brisée par la dispersion d'ordre trois

$$i\partial_z A = -\partial_t^2 A - i\alpha\partial_t^3 A + |A|^2 A. \quad (7)$$

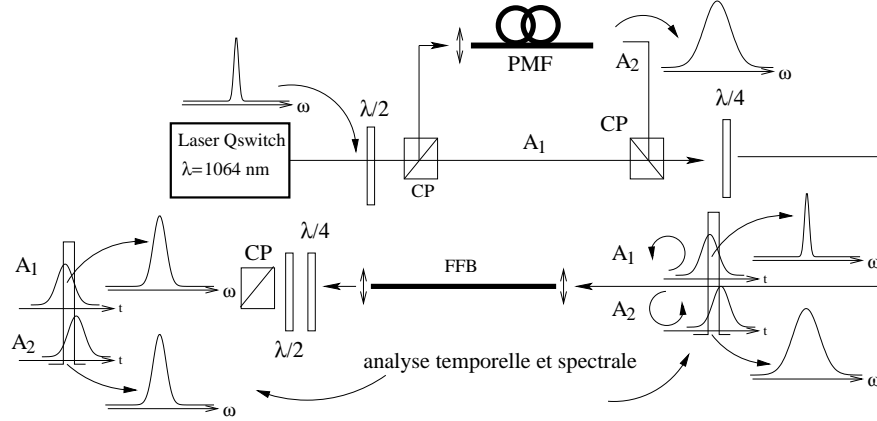
Cette équation est souvent employée en optique pour la description de la propagation de la lumière dans une fibre optique au voisinage du zéro de dispersion [6]. La relation de dispersion s'écrit  $k(\omega) = \omega^2 - \alpha\omega^3$ . L'équation cinétique associée à l'équation (7) révèle l'existence de l'invariant local  $J_\omega = n(z, \omega) - n(z, q - \omega)$ , où  $q = 2/3\alpha$ . Dans ce système, les fréquences  $(\omega, q - \omega)$  résonent avec n'importe quelle paire de fréquences  $(\omega', q - \omega')$ , car  $k(\omega) + k(q - \omega) = q^2/3$ . L'équilibre local correspondant s'écrit,  $n^{loc}(\omega) = J_\omega/2 + [1 + \sqrt{1 + \lambda^2 J_\omega^2/4}]/\lambda$ . Le fait que le système d'ondes n'atteigne pas un état d'équipartition d'énergie se manifeste ici de façon claire par l'apparition d'un piédestal dans le spectre d'équilibre  $n^{loc}(\omega)$  (voir Fig. 1b).

### 3 Expériences et simulations

La théorie développée ci-dessus est valable dans le régime faiblement non linéaire  $U/E \ll 1$  ( $U = H - E$  est la part non linéaire de l'énergie). Dans cette section, nous montrons (expérimentalement et numériquement) que les signatures des phénomènes décrits par la théorie cinétique subsistent y compris en régime non linéaire.

Nous avons réalisé une expérience d'optique dont le principe de base est de co-propager dans une fibre optique (très faiblement biréfringente et monomode transversalement) deux ondes polarisées circulairement droite et gauche ( $A_1$  et  $A_2$ ) (Fig. 3). Quand la biréfringence de la fibre est négligeable, la propagation des deux ondes est décrite par les équations (1) et (2) avec  $\eta = 1$  et  $\kappa = 2$  [6]. L'expérience est réalisée dans le cas particulier où  $N_1 = N_2$ ; l'état d'équilibre correspond alors à  $n_1^{loc}(\omega) = n_2^{loc}(\omega)$  (cf section précédente). Afin d'obtenir un effet significatif, les deux spectres optiques de départ sont de largeurs très différentes (0.05 nm et 1.6 nm). Quand la puissance des deux ondes est identique, l'état d'équilibre attendu est donc caractérisé par l'égalité des spectres optiques de  $A_1$  et  $A_2$ .

Les contraintes de l'expérience ne permettent d'explorer qu'un régime transitoire (équilibre non atteint) et non linéaire. Les spectres d'équilibre sont atteints pour une longueur de propagation typiquement de 100 à 1000 longueurs non linéaires  $L_0$  mais la diffusion Raman stimulée apporte une dissipation non négligeable à partir de 10  $L_0$ . Le régime hamiltonien ne peut donc être exploré que pour des distances de quelques  $L_0$ . De plus la fibre utilisée (très faiblement biréfringente) doit être de longueur réduite afin d'éviter toute biréfringence induite par courbure. Avec une faible longueur physique (1.6 m dans nos expériences), il est nécessaire, pour parcourir plusieurs  $L_0$ , d'utiliser des puissances optiques importantes ce qui amène l'expérience en régime non linéaire (Fig. 4d).



**Fig. 3.** Dispositif expérimental. PMF : fibre à maintien de polarisation de longueur 2m. FFB : fibre faiblement biréfringente de longueur 1.6m.  $\lambda/2$ ,  $\lambda/4$  : lame demi d'onde, quart d'onde. CP : cube polariseur.

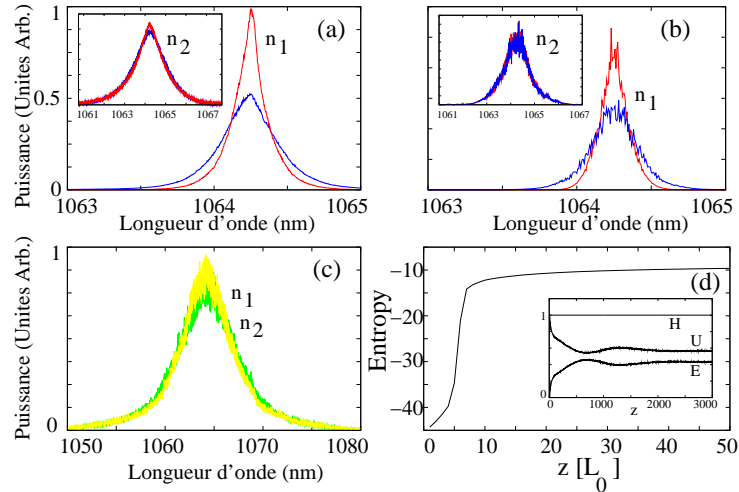
Le dispositif expérimental est présenté de façon schématique sur la figure 3. La source utilisée dans l'expérience est un laser Q-switch Nd :YAG émettant des impulsions de 40ns à un taux de répétition de 30kHz. Il est linéairement polarisé ; sa longueur d'onde est de  $\lambda = 1064\text{nm}$  et sa largeur spectrale de  $\sim 0.05\text{nm}$  à mi hauteur. Afin d'injecter deux ondes de spectres différents, le faisceau laser est divisé en deux à l'aide d'un cube polariseur. Le faisceau transmis par le cube fournit l'onde  $A_1$  (de spectre étroit) et le faisceau réfléchi par le cube est injecté dans une fibre à maintien de polarisation (PMF) de façon à élargir son spectre par mélange à quatre ondes [9]. La lumière à la sortie de la PMF correspond au champ  $A_2$  et son spectre s'étale sur une largeur de  $\sim 1.6\text{nm}$  à mi-hauteur. Notons que la diffusion Raman spontanée est filtrée à l'aide d'un multiplexeur fibré afin de ne pas être amplifiée dans la fibre faiblement biréfringente.

Les deux ondes (linéairement polarisées à  $90^\circ$  l'une de l'autre) sont recombinées à l'aide d'un cube polariseur, traversent une lame quart d'onde transformant leur polarisations rectilignes en polarisations circulaires droite et gauche, puis sont finalement injectées dans la fibre faiblement biréfringente (FFB). A la sortie de la fibre, la polarisation des deux ondes est analysée grâce à une lame quart d'onde, une lame demi onde puis un cube polariseur.

La dernière difficulté de l'expérience réside dans le fait qu'au cours de l'impulsion de 40ns, la puissance n'est évidemment pas une constante alors que les effets attendus dépendent fortement de la puissance ; de plus les ondes  $A_1$  et  $A_2$  sont décalées de 13ns à cause de la propagation dans la PMF. Nous utilisons donc un système d'analyse résolu en temps : nous injectons la lumière dans un analyseur de spectre optique à l'aide d'un modulateur acousto-optique fibré qui nous permet de "découper" des tranches d'impulsion de 10 à 20 ns. Nous ajustons le déclenchement de cette tranche afin d'avoir des puissances instantanées identiques (400W) pour l'onde  $A_1$  et l'onde  $A_2$ .

La figure 4a montre les spectres des ondes  $A_1$  et  $A_2$  lorsqu'elle interagissent ( $\kappa = 2$ ) ou pas ( $\kappa = 0$ ). Le résultat est sans ambiguïté : l'onde  $A_1$  de spectre étroit s'élargit lorsqu'elle est en interaction avec l'onde de spectre large (qui ne change pratiquement pas). L'intégration numérique des équations (1,2) avec des spectres dont les composantes ont des phases aléatoires [9] et les paramètres de l'expérience reproduisent

très fidèlement les comportements expérimentaux (figure 4b). Notons qu'il est nécessaire de tenir compte de la propagation dans la fibre à maintien de polarisation dans la simulation afin d'obtenir un accord quantitatif.



**Fig. 4.** a) Expérience : spectres optiques  $n_1$  de l'onde  $A_1$  à la sortie de la FFB : le spectre est étroit en absence d'interaction avec l'onde  $A_2$  ( $\kappa = 0$ ) et s'élargit du fait de l'interaction avec  $A_2$  ( $\kappa = 2$ ). En figure insérée, spectres optiques  $n_2$  de l'onde  $A_2$  à la sortie de la FFB en présence et en absence d'interaction avec  $A_1$ . Les deux champs injectés ont une puissance de 400W. La distance de propagation  $z = 2.5L_0$ . b) Simulations numérique correspondant à l'expérience de la figure a) (procédure décrite dans [9]). c) Simulation numérique : spectres optiques  $n_1$  et  $n_2$  pour  $z = 50L_0$ . d) Entropie, hamiltonien (H), énergie cinétique (E) et partie non linéaire de l'hamiltonien (U) en fonction de  $z$  dans la simulation numérique..

Les simulations numériques nous permettent d'explorer la physique à grande distance de propagation dans des conditions inaccessibles dans l'expérience. La figure 4c montre que les deux spectres coïncident à partir d'une distance de propagation de  $50 L_0$ . L'évolution des spectres est irréversible et elle est associée à une augmentation puis une saturation de l'entropie (telle que définie dans le régime linéaire). A l'état stationnaire qui ne vérifie pas la propriété d'équipartition de l'énergie, les spectres de  $A_1$  et  $A_2$  sont identiques. Notons que dans l'état final, les parts linéaire et non linéaire de l'hamiltonien sont du même ordre (Fig. 4d).

## Références

1. G. GALLAVOTTI (Ed.) *The Fermi-pasta-Ulam Problem : A Status Report*, (Lecture Notes in Physics, Springer 2007).
2. P. VILLAIN & M. LEWENSTEIN, *Physical Review A*, **62**, 043601 (2000) — *Physical Review A*, **63**, 033607 (2001).
3. V. E. ZAKHAROV, V. S. L'VOV & G. FALKOVICH, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I* (Springer, Berlin, 1992) — S. DYACHENKO *et al.*, *Physica D*, **57**, 96 (1992) — V. ZAKHAROV, F. DIAS & A. PUSHKAREV, *Physics Reports*, **398**, 1 (2004).
4. C. CONNAUGHTON *et al.*, *Physical Review Letters* **95**, 263901 (2005); S. PITOIS *et al.*, *Physical Review Letters*, **97**, 033902 (2006) — G. DÜRING, A. PICOZZI & S. RICA, *Physica D*, **238**, 1524 (2009).
5. P. SURET, S. RANDOUX, H. JAUSLIN & A. PICOZZI, *Physical Review Letters*, **104**, 054101 (2010).
6. Y. S. KIVSHAR & G. P. AGRAWAL, *Optical Solitons : From Fibers to Photonic Crystals* (Ac. Press, 2003).
7. L. PITAEVSKII & S. STRINGARI, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford Science Publications, 2003).
8. S. MANAKOV, *JETP* **65**, 505 (1973) — V. E. ZAKHAROV & E. SCHULMAN, *Physica D*, **4**, 270 (1982) — **29**, 283 (1988).
9. B. BARVIAU, S. RANDOUX & P. SURET, *Optics Letters*, **31**, 1696 (2006).