« Compressive Sensing » en utilisant le Chaos

Lei Yu[1,2,3], Jean-Pierre Barbot[2,3] Gang Zheng[3] & Hong Sun[1]

[1] Signal Processing Laboratory, Whuan University, China
[2] ECS-EA 3649, ENSEA, 6 Avenue du Ponceau, 95014, Cergy-Pontoise
[3] EPI-ALIEN INRIA
barbot@ensea.fr

Résumé

La méthode dite de l'acquisition comprimée plus connue sous le vocable anglo-saxon de 'Compressive Sensing' est une nouvelle méthode qui permet de capturer et de retrouver par la suite un signal échantillonné à des fréquences sous Nyquist. Afin de garantir la reconstitution parfaite du signal, cette méthode requière la construction d'une matrice dite 'sensing' matrice, possédant des propriétés d'inversion particulières. Ici, une construction de cette matrice à l'aide de séquences issues d'un système chaotique est proposée et il est prouvé que cette matrice vérifie avec une écrasante probabilité (supérieure à une construction aléatoire de type Gaussien) les propriétés de reconstruction requises.

1 Introduction et Préliminaires

Le concept récemment développé en traitement du signal dit du 'Compressive Sensing CS', attire l'attention de nombreux chercheurs. À la différence de la théorie traditionnelle d'échantillonnage des données, l'acquisition des signaux et la compression de ces derniers se font en même temps avec le C.S., ceci permet aux signaux d'être échantillonnés à des fréquences inférieures à la fréquence de Nyquist et de conserver une reconstruction exacte après décompression [6].

La procédure du 'Compressive Sensing' peut être exprimée comme une projection linéaire

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{v} \tag{1}$$

où les $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sont les signaux originaux, $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice d'acquisition compression et $y \in \mathbb{R}^m$ est la mesure. En CS m est toujours très petit par rapport à n, ce qui réduit considérablement la longueur des signaux. Mais, cela a pour conséquence que l'inversion de l'équation (1) est grandement indéterminée. Ceci conduit à l'hypothèse fondamentale en CS, dite de l'éparpillement 'sparsity' des signaux. De façon simple les signaux sont supposés être constitués d'une majorité de zéros dans une 'base appropriée' (frequentiel, ondelette,..), sous cette hypothèse à partir de (1) et de la connaissance de $\mathbf{y}$ les signaux $\mathbf{v}$ peuvent être retrouvés.

DÃ©finition 1 *(Sparsity) Soit le vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ et notons $Card(\mathbf{v}) = Card\{v_i \neq 0,\, i \in [1, n]\}$ le nombre d'éléments de $\mathbf{v}$ différent de Zéro, alors le vecteur $\mathbf{v}$ est dit un 's-sparsity' vecteur, si $Card(v) \leq s \ll n$.*

La Définition 1, nous permet de définir l'ensemble Σ_s des vecteurs éparpillés 's-sparsity' comme suit :

$$\Sigma_s = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid Card(\mathbf{v}) \leq s\} \tag{2}$$

Intuitivement, l'inversion de l'équation (1) peut être résolus par la recherche du plus petit vecteur au sens de l'éparpillement vérifiant (1) pour un $\mathbf{y}$ donné, c a d le $\mathbf{v} \in \Sigma_s$ avec le plus petit s. Ce qui s'écrit [6] :

$$\mathbf{v}^* = \arg \min_{\Phi \mathbf{v} = y} \|\mathbf{v}\|_0 \tag{3}$$

où $\|\mathbf{v}\|_0$ est la norme ℓ_0 et désigne le nombre d'éléments de $\mathbf{v}$ non identiquement nul. Toutefois, il a été montré en [6] que ce problème est un problème NP-Hard, ce qui a conduit à la réécriture du problème sous des conditions moins contraignantes [6], ce qui donne :

$$\mathbf{v}^* = \arg \min_{\Phi \mathbf{v} = y} \|\mathbf{v}\|_1 \tag{4}$$

où $\|\mathbf{v}\|_1$ est la norme ℓ_1 et désigne la somme des valeurs absolues de toutes les entrées de $\mathbf{v}$.

DÃ©finition 2 (Restricted Isometry Property [4]) *Si pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \Sigma_s$, la matrice $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vérifie l'inégalité suivante :*

$$(1-\delta_s)\|\mathbf{v}\|_2^2 \leq \|\Phi\mathbf{v}\|_2^2 \leq (1+\delta_s)\|\mathbf{v}\|_2^2 \tag{5}$$

avec $\delta_s > 0$ la plus petite constante satisfaisant (5), alors la matrice Φ satisfait la Restricted Isometry Property RIP à l'ordre s avec une constante δ_s.

La définition 2 et plus particulièrement l'équation (5) ont permis d'énoncer le théorème suivant :

ThÃ©orÃ¨me 1 (Exact Recovery Theorem [4])

– *Si la RIP est vérifiée à l'ordre $2s$ pour la matrice Φ satisfaisant la condition suivante $\delta_{2s} < 1$, alors pour tout vecteur $\mathbf{v}$ $in\Sigma_s$, il existe une solution unique pour le problème (3).*
– *Si de plus δ_{2s} vérifie l'inégalité $\delta_{2s} < \sqrt{2}-1$, alors pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \Sigma_s$, la solution au problème (3) est équivalente à la solution au problème (4).*

La conséquence directe du théorème 1 est que le problème d'exiber une matrice d'acquisition compressée Φ RIP satisfaisant les conditions du théorème est devenue l'un des plus importants problème en CS. Ainsi, Candès et Tao ont proposé que la matrice Φ soit construite avec des éléments provenant d'une distribution Gaussienne ou de Bernoulli. Ceci a conduit à ce que Φ vérifie la RIP avec une grande probabilité, sous la condition d'éparpillement $s \leq O(m/\log n)$ [5]. De même Φ construit sur une base de Fourier aleatoire vérifie la RIP avec une grande probabilité sous l'hypothèse d'éparpillement $s \leq O(m/(\log n)^6)$ [5]. Même s'il existe certaines matrices Φ déterministes d'acquisition compression, telles que *Chirp Sensing Codes* par L. Applebaum, *et al.* [2] ou bien en utilisant des corps finis par R. A. Devore [8] ou encore en utilisant des Reed-Muller codes du second ordre par S. Howard *et al.* [9], leur RIP n'est pas, jusqu'à présent ou du moins à notre connaissance, garantie de façon certaine. Ce qui fait que la majorité des matrices utilisées en CS sont des matrices aléatoires.

Dans cette communication, notre objectif est d'employer une séquence chaotique particulière pour construire la matrice Φ d'acquisition compression, nous nommerons, par abus de langage, cette matrice 'matrice chaotique' (elle est plus exactement construite sur la base d'une séquence chaotique en tenant compte de bonnes propriétés développées ci-dessous). Ainsi basé sur *Egodicity* et sur des bonnes propriétés de la séquence chaotique, nous prouvons que la matrice chaotique Φ vérifie la RIP avec une écrasante probabilité, à condition que l'hypothèse d'éparpillement $s \leq O(m/\log(n/s))$ soit vérifiée. Nous avons aussi montré que la probabilité de satisfaire la RIP pour la matrice chaotique proposée est plus grande que celle obtenue pour la matrice aléatoire Gaussienne [5] et la matrice aléatoire de Bernoulli [5].

Cette communication est organisée comme suit, dans le paragraphe 2, les contributions principales de ce travail sont présentées. Dans le paragraphe 3, Les preuves des principaux résultats sont données.

2 Résultats principaux

2.1 Quasi Beta Distribution

Ici nous introduisons la notion de quasi Beta distribution qui comme nous le verrons par la suite est un Beta distribution particulière à une translation prés.

DÃ©finition 3 *(Beta-like distribution) Une variable aléatoire x satisfaisant la fonction de densité de probabilité suivante :*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}(0.25 - x^2)^{-1/2} \tag{6}$$

est dite quasi Beta distribution.

DÃ©finition 4 *(Beta-like matrix) Pour $m \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$ et $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la matrice Φ est dite être une quasi Beta matrice si ses composantes vérifient $\phi_{ij} = \sqrt{\frac{8}{m}} r_{ij}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, où les r_{ij} sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) (independent distribution distributed) de type quasi Beta distribution (6).*

2.2 Matrice Chaotique

Considérons l'équation logistique [7] suivante :

$$z_+ = rz(1-z), \quad \text{with} \quad r \in]0,4] \tag{7}$$

où $z \in]0,1[\subset \mathbb{R}$ est l'état discret. L'équation logistique (7) avec le paramètre r égale à 4 a une séquence $z(k)$ aléatoire avec une Beta distribution avec les coefficients $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.5$ [11], avec la fonction de densité probabiliste suivante $f(x; 0.5, 0.5) = \frac{1}{\pi}(x - x^2)^{-1/2}$.

Considérons $z_i(k)$ la séquence générée par l'équation logistique (7) avec comme condition initiale $z_i(0)$, et soit $x_i(k)$ la variable régularisée de $z_i(k)$ de la façon suivante : $x_i(k) = z_i(k) - 0.5$, alors, la séquence $x_i(k)$ peut être considérée comme une 'variable aléatoire' de type quasi Beta distribution. Ainsi, en choisissant n conditions initiales différentes $z(0) \in]0,1[^n \subset \mathbb{R}^n$,[1] nous obtenons n vecteurs de dimension m, avec lesquels il est possible de construire une matrice Φ_{chaos} si nous appliquons le facteur d'échelle suivant $\sqrt{8/m}$

$$\Phi_{chaos} = \sqrt{\frac{8}{m}} \begin{bmatrix} x_0(0) & \dots & x_{n-1}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0(m-1) & \dots & x_{n-1}(m-1) \end{bmatrix}$$

Evidement, Φ_{chaos} est une quasi Beta matrice.

2.3 Matrice Chaotique et RIP

Au lieu d'analyser la RIP pour la matrice Chaotique Φ_{chaos}, nous allons analysez la RIP pour les quasi Beta matrices Φ, puisque statistiquement, Φ_{chaos} a le même comportement par rapport à la RIP que Φ. Pour ceci, nous utilisons le théorème suivant :

ThÃ©orÃ¨me 2 *Soit une quasi Beta matrice $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$, il existe une constante $\delta > 0$,[2] et $n \gg s > 0$, tel que, pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \Sigma_s$, si $s \leq O(m/\log(n/s))$, alors l'équation suivante est vérifiée avec une écrasante probabilité :*

$$(1-\delta)\|\mathbf{v}\|_2^2 \leq \|\Phi\mathbf{v}\|_2^2 \leq (1+\delta)\|\mathbf{v}\|_2^2 \tag{8}$$

Remarquons que le Théorème 2 implique la RIP pour la matrice chaotique Φ_{chaos}, ceci va être prouvé au paragraphe suivant.

3 Preuves

Avant d'analyser la RIP pour la quasi Beta matrice, considérons l'une de ses sous matrices, appelée Beta-T matrice, qui est définie comme suit :

DÃ©finition 5 *(Beta-T matrix) Pour une quasi Beta matrice $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$, définissons $T \subset \{1,2,...,n\}$, et pour $i \in T$ dénotons Φ_i le $i^{ème}$ vecteur colonne de Φ, et notons $\Phi_T \in \mathbb{R}^{m \times s}$, où $s = Card(T)$, alors la sous matrice Φ_T de Φ est dite être une Beta-T matrice.*

En [1], il a été prouvé que ce type de projections avec des matrices satisfaisant des conditions de distribution spéciale [3] sont Johnson-Lindenstrauss (J-L) conservatives [10] avec une écrasante probabilité. Dans le sous paragraphe 3.1, nous allons aussi prouver que la Beta-T matrice est aussi J-L conservative.

Ainsi en considérant toutes les possibilités de sélection de Beta-T matrice Φ_T à partir d'une quasi Beta matrice Φ, nous pouvons donner une preuve du Théorème 2, ceci va être présenté à la section 3.2.

[1] Les conditions initiales $z(0)$ sont supposées aussi vérifier la Beta distribution.
[2] s est omis pour ne pas alourdir les notations.
[3] Bernoulli distribution et quasi Bernoulli distribution, voir [1].

3.1 Beta-T Matrice J-L Conservative

ThÃ©orÃ¨me 3 (J-L Embedding with Beta-T Matrix) *Soit une Beta-T matrice $\Phi_T \in \mathbb{R}^{m\times s}$, il existe une constante $\delta \in]0,1[$, telle que, pour tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^s$, l'inégalité suivante*

$$(1-\delta)\|\mathbf{u}\|_2^2 \leq \|\Phi_T \mathbf{u}\|_2^2 \leq (1+\delta)\|\mathbf{u}\|_2^2 \tag{9}$$

est satisfaite avec une écrasante probabilité.

Afin de prouver ceci, nous avons besoin en premier de borner la valeur du moment pour la quasi Beta distribution définie par (6).

Les bornes des moments : Avant de donner les résultats, introduisons quelques notations utiles à l'exposé. Pour toute Beta-T matrice $\Phi_T \in \mathbb{R}^{m\times s}$ et tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^s$, nous notons $\|\Phi_T \mathbf{u}\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (<\phi_i, \mathbf{u}>)^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m Q_i^2$, où $Q_i = \sqrt{8}\sum_{j=1}^s u_j c_{ij}$, avec c_{ij} satisfaisant (6). Par la suite, pour simplifier, nous omettrons les indices sur Q et c_i pour représenter respectivement Q_i et c_{ij}.

Lemme 1. *Soit t_i et c_i des variables indépendantes et identiquement distribuées (iid) satisfaisant respectivement une distribution Gaussienne normale $\mathcal{N}(0,1)$ et une quasi Beta distribution (6), pour $1 \leq i \leq s$, alors $E[8^l c_i^{2l}] \leq E[t_i^{2l}]$ pour tout $2l^{\text{ème}}$ moment de chaque distribution. De plus, pour chaque vecteur de norme unitaire $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^s$ et chaque $k \in \mathbb{Z}^+$, nous avons $E[Q^{2k}] \leq E[T^{2k}]$, où $Q = \sum_{i=1}^s u_i c_i$ et $T = \sum_{i=1}^s u_i t_i$.*

Démonstration. Avant tout, rappelons nous que tout $2l^{\text{ème}}$ moment de $\mathcal{N}(0,1)$, est égal à $(2l-1)!!$ et pour la distribution (6), le $2l^{\text{ème}}$ moment est égal à $(2l-1)!!/(8^l l!)$, wce qui implique que $E[8^l c_i^{2l}] \leq E[t_i^{2l}]$.

Ainsi, pour tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^s$ de norme unitaire et tout $k \in \mathbb{Z}^+$, nous avons

$$E[Q^{2k}] = E\left[8^k\left(\sum_{i=1}^s u_i c_i\right)^{2k}\right] = \sum_{\mathcal{T}} \binom{2k}{2l_1, ..., 2l_s} \prod_{i=1}^s u_i^{2l_i} E[8^{l_i} c_i^{2l_i}] \tag{10}$$

où l_i est l'exposant pour le $i^{\text{ème}}$ term et $\mathcal{T}$ représente l'ensemble des termes polynomiaux avec seulement des exposants paire, car par symétrie les termes impaire sont tous nuls.

De plus, nous avons $T = \sum_{i=1}^s u_i \cdot t_i$ où u_i est le $i^{\text{ème}}$ composant de $\mathbf{u}$ et t_i est une variable indépendante et identiquement distribuée (iid) satisfaisant une distribution Gaussienne normale $\mathcal{N}(0,1)$, en raison de la caractéristique de 2-stabilité de cette distribution, T a aussi une distribution Gaussienne normale $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, nous avons

$$E[T^{2k}] = \sum_{\mathcal{T}} \binom{2k}{2l_1, ..., 2l_s} \prod_{i=1}^s u_i^{2l_i} E[t_i^{2l_i}] \tag{11}$$

Alors l'inégalité du lemme 1 peut être déduite en comparant (10) et (11) en tenant compte que le lemme 1 est satisfait.

Remarque 1 *Si la variable aléatoire b_i satisfait une distribution de Bernoulli, son ($2l^{\text{ème}}$) moment peut être calculé $E[b_i^{2l}] = 1$. Alors, nous avons $E[8^l c_i^{2l}] \leq E[b_i^{2l}]$, ce qui donne des inégalités identiques au lemme 1 entre la quasi Beta distribution et la distribution de Bernoulli.*

Lemme 2. *Soit $Q = \sum_{i=1}^s u_i c_i$ où u_i est le $i^{\text{ème}}$ composant de $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^s$ et c_i est une (iid) variable satisfaisant une quasi Beta distribution (6), alors, pour $h \in]0, 1/2[$ nous avons*

$$E[\exp(hQ^2)] \leq \frac{1}{\sqrt{1-2h}} \qquad et \qquad E[Q^4] \leq 3 \tag{12}$$

Démonstration. Un développement de Taylor et l'inégalité du lemme 1 nous donnent

$$\begin{aligned} E[\exp(hQ^2)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} E[Q^{2k}] \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} E[T^{2k}] = E[\exp(hT^2)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2) \exp(ht^2) dt = \frac{1}{\sqrt{1-2h}} \end{aligned}$$

Pour $E[Q^4]$, du lemme 1 nous obtenons

$$E[Q^4] \leq E[T^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2) t^4 dt = 3$$

Preuve du Théorème 3 De l'inégalité de Chernoff [3], et en prenant des valeurs de h positives, nous avons

$$\begin{aligned} \Pr\left[\|\Phi_T \mathbf{u}\|^2 \geq 1+\delta\right] &\leq \exp(-hm(1+\delta)) E\left[\exp\left(hm\|\Phi_T \mathbf{u}\|^2\right)\right] \\ &= \exp(-hm(1+\delta)) \left(E\left[\exp\left(hQ^2\right)\right]\right)^m \\ &\leq \exp(-hm(1+\delta)) \left(\frac{1}{\sqrt{1-2h}}\right)^m \end{aligned} \tag{13}$$

Il est naturel que l'extremum de (13) soit obtenu quant sa dérivée par rapport à h est égale à 0, nous en déduisons $h_{\text{opt}} = \frac{1}{2}\frac{\delta}{1+\delta}$. Reportant ce résultat dans (13), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Pr\left[\|\Phi_T \mathbf{u}\|^2 \geq 1+\delta\right] &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{1-2h}}\right)^m \exp(-hm(1+\delta)) \\ &= ((1+\delta)\exp(-\delta))^{m/2} \\ &< \exp\left(-\frac{m}{2}\left(\delta^2/2 - \delta^3/3\right)\right) = \exp(-c_1(\delta)m) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue par un développement de Taylor et en tenant compte que $c_1(\delta) = \delta^2/4 - \delta^3/6$.

De façon similaire, à partir de l'inégalité de Chernoff, nous pouvons calculer la borne inférieure de sa probabilité :

$$\begin{aligned} \Pr\left[\|\Phi_T \mathbf{u}\|^2 \leq 1-\delta\right] &\leq \exp(hm(1+\delta)) E\left[\exp\left(-hm\|\Phi_T \mathbf{u}\|^2\right)\right] \\ &= \exp(hm(1+\delta)) \left(E\left[\exp\left(-hQ^2\right)\right]\right)^m \end{aligned} \tag{14}$$

Le développement de Taylor du terme $\exp\left(-hQ^2\right)$, nous donne

$$E\left[\exp\left(-hQ^2\right)\right] < 1 - h + \frac{h^2}{2} E\left[Q^4\right]$$

avec $E\left[Q^2\right] = 1$.
Ainsi, à partir du Lemme 2, nous obtenons

$$E\left[\exp\left(-hQ^2\right)\right] \leq 1 - h + \frac{3}{2}h^2$$

Alors en remplaçant (14) par cette inégalité, et en imposant que la dérivée par rapport à h de la borne soit égale à 0, nous trouvons la valeur optimale $h_{\text{opt}} = \frac{-2-\delta+\sqrt{4+8\delta-5\delta^2}}{3(1-\delta)}$, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \Pr\left[\|\Phi_T \mathbf{u}\|^2 \leq 1-\delta\right] &\leq \exp(hm(1-\delta)) \left(E\left[\exp(-hQ^2)\right]\right)^m \\ &< \exp(hm(1-\delta)) \left(1 - h + \frac{3}{2}h^2\right)^m = \exp(-c_2(\delta)m) \end{aligned}$$

où $c_2(\delta) = h_{\text{opt}}(1-\delta)\left(1 - h_{\text{opt}} + \frac{3}{2}h_{\text{opt}}^2\right)$.

En prenant $c(\delta) = \min(c_1(\delta), c_2(\delta))$, nous trouvons

$$\Pr\left[\left|\|\Phi_T \mathbf{u}\|^2 - 1\right| \geq \delta\right] \leq 2\exp(-c(\delta)m) \tag{15}$$

Remarque 2

1. *La probabilité en (15) est très faible pour des m et δ donnés.*
2. *Le lemme 1 implique que la probabilité en (15) est plus petite pour la Beta-T matrice que pour les matrices aléatoires avec distribution Gaussienne ou Bernoulli. Ceci, implique que la probabilité de satisfaire la RIP est plus forte pour la matrice chaotique que pour ces deux types de matrice aléatoire.*

3.2 Preuve du Théorème 2

Démonstration. Pour une Beta matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ donnée et un vecteur éparpillé $\mathbf{v} \in \Sigma_s$, nous notons T l'ensemble des index des composants non nuls du vecteur $\mathbf{v}$, où $Card(T) = k \leq s \ll n$. Alors avec cet ensemble d'index T et la définition 5 nous pouvons toujours construire une Beta-T matrix $\Phi_T \in \mathbb{R}^{m\times s}$. Notons $\mathcal{E}_k$ la probabilité pour que la condition (5) ne soit pas vérifiée, c a d, $\mathcal{E}_k = \{\|\Phi_T\mathbf{v}\|_2^2 \geq (1+\delta) \cup \|\Phi_T\mathbf{v}\|_2^2 \leq (1-\delta)\}$ et notons $\mathcal{E}$ l'union de ces possibilités, c a d, $\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^s \mathcal{E}_k$.

En utilisant le résultat du Théorème 3, nous obtenons.

$$\begin{aligned}\Pr[\mathcal{E}] = \Pr\left[\bigcup_{k=1}^s \mathcal{E}_k\right] &= 2\exp(-c(\delta)m)\sum_{k=1}^s \binom{n}{k} \leq 2s\binom{n}{s}\exp(-c(\delta)m) \\ &\leq \exp(\log 2 - c(\delta)\,m + s(\log(n/s)+1) + \log s)\end{aligned}$$

Où, pour $c_3 > 0$ et $s \leq c_3 m/\log(n/s)$, la borne à un exponentielle d'exposant $\leq -c_4 m$ avec $c_4 \leq c(\delta) - c_3[1 + (1 + (\log s)/s)/\log n/s]$. Ainsi, nous pouvons choisir c_3 suffisamment petit pour que $c_4 > 0$.

Nous en déduisons que la probabilité de vérifier l'inégalité (8) est égale à $\Pr[\bar{\mathcal{E}}] \geq 1 - \Pr[\mathcal{E}] = 1 - 2e^{-c_4 m}$ où $\bar{\mathcal{E}}$ est le complémentaire de $\mathcal{E}$.

Références

1. D. Achlioptas, Database-friendly random projections. In *Proceedings of the 20th ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART symposium on Principles of database systems (PODS)*, (New York, USA), pp. 274-281, 2001.
2. L. Applebaum, S. Howard, S. Searle & R. Calderbank, Chirp sensing codes : Deterministic compressed sensing measurements for fast recovery, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26 (2), March 2009.
3. S. Boucheron, O. Bousquet & G. Lugosi, *Advanced Lectures in Machine Learning*, Chap. Concentration Inequalities (Springer) pp. 208–240, 2004.
4. E. J. Candès, The restricted isometry property and its implications for compressed sensing, *Compte Rendus de l'Academie des Sciences*, Serie I, **346** (9-10), May 2008.
5. E. J. Candès & T. Tao, Near-optimal signal recovery from random projections : Universal encoding strategies ? ? ? **52** (12), 5406–5425, 2006.
6. E. J. Candès & M. B. Wakin, An introduction to compressive sampling. ? ?, **25** (2), 21–30, 2008.
7. H. Dang-Vu & C. Delcarte, *Bifurcations et chaos*, Ellipses, Paris, 2000.
8. R. A. DeVore, Deterministic constructions of compressed sensing matrices, *Journal of Complexity*, **23** (4-6), August 2007.
9. S. Howard, R. Calderbank & S. Searle, A fast reconstruction algorithm for deterministic compressive sensing using second order reed-muller codes, *Conference on Information Sciences and Systems* ? ? , March 2008.
10. W. Johnson & J. Lindenstrauss, Extensions of Lipschitz maps into a Hilbert space. *Contemporary Mathematics*, **26**, 189–206, 1984.
11. A. Vlad, A. Luca & M. Frunzete, Computational measurements of the transient time and of the sampling distance that enables statistical independence in the logistic map, In *Proc. International Conference on Computational Science and Its Applications (ICCSA)*, Springer-Verlag, pp. 703–718, 2009.