Des dynamiques temporelles aux diagrammes spatio-temporels : défauts, cohérence de phase et observabilité

Dalila Amroun Aliane[1], Luc Pastur[2] & Christophe Letellier[3]

[1] LEQ, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, BP 32, Bab Ezzouar, 16111 Alger
[2] LIMSI-CNRS, Université de Paris Sud , BP 133, Bât 508, 91403 Orsay cedex
[3] CORIA-UMR 6614, Université de Rouen, BP 12, 76801 St-Etienne du Rouvray cedex
amroun_dalila@yahoo.fr

Résumé. Un premier lien explicite est proposé entre les portraits de phase reconstruits à partir de mesures locales et la dynamique des défauts observés dans les diagrammes spatio-temporels, et ce lorsque les différents oscillateurs sont en synchronisation de phase. Le système étudié est un laser monomode à élargissement homogène où la diffraction est prise en compte. L'intensité laser est utilisée pour construire les diagrammes spatio-temporels et les portraits de phase d'un oscillateur donné. Nous montrons que la visite du voisinage d'un point singulier de l'espace reconstruit où existe un fort défaut d'observabilité se traduit par la présence de défauts dans les diagrammes spatio-temporels, que les régimes soient quasi-périodiques ou chaotiques. Toutefois, pour une chaîne de systèmes de Rössler, il est possible d'avoir des dynamiques chaotiques associées à des diagrammes sans défauts, lorsque le chaos est avec cohérence de phase et sans problème d'observabilité.

Abstract. A first explicit link is here proposed between phase portraits reconstructed from local measurements and the dynamics of defects observed in spatio-temporal diagrams, when the different oscillators are phase synchronized. The system under study is a homogeneously broadened single-mode laser with diffraction taken into account. Laser intensity is used to construct spatio-temporal diagrams and phase portraits of a given oscillator. We show that the visit of the neighborhood of a fixed point in the reconstructed phase space where there is a strong lack of observability induces defects in spatio-temporal diagrams, either the regimes are quasi-periodic or chaotic. However, for a chain of Rössler systems, it is possible to observe chaotic dynamics associated to diagrams without defects, in the case of phase-coherence chaos without any lack of observability.

1 Introduction

Les systèmes spatialement étendus sont habituellement étudiés en termes de diagrammes spatio-temporels et leur analyse se limite le plus souvent aux premières instabilités [1]. A cause de l'absence d'un théorème de type ≪ Takens ≫ [2] pour les systèmes spatio-temporels, la dynamique résultante est rarement étudiée à partir de portraits de phase reconstruits à partir d'une variable mesurée localement. Nous proposons ici un premier lien explicite entre de tels portraits de phase et la dynamique des défauts observés dans les diagrammes spatio-temporels, lorsque les différents oscillateurs sont en synchronisation de phase [3]. Dans ce cas, les dynamiques locales sont globalement équivalentes, et nous montrons l'existence d'une relation entre la dynamique d'un oscillateur choisi arbitrairement et la dynamique des défauts observés dans les diagrammes spatio-temporels.

Pour cela, nous utilisons un laser monomode à élargissement homogène où la diffraction est prise en compte [4]. La dynamique est étudiée *via* l'intensité laser, et nous montrons que l'observabilité très pauvre fournie par cette variable influence la structure des portraits de phase et l'apparition des défauts. Dans la mesure où la visite du voisinage d'un point singulier associé à une forte perte d'observabilité est directement reliée à la présence de défauts dans les diagrammes spatio-temporels, la relation entre les défauts et l'observabilité implique la possibilité d'avoir des dynamiques (locales) chaotiques associées à des diagrammes sans défauts, ce que nous montrons avec une chaîne de systèmes de Rössler.

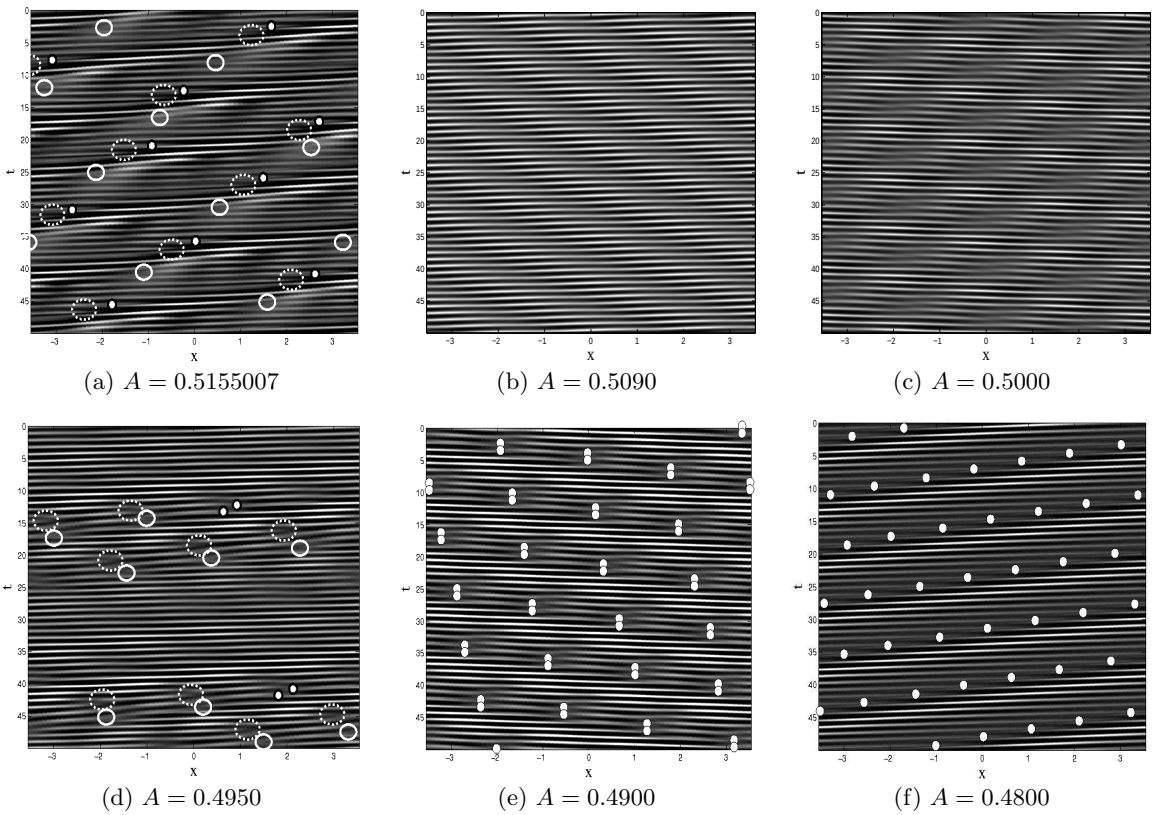
© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

2 Modèle du laser

Le système étudié est un laser monomode à élargissement homogène, décrit par les équations de Maxwell-Bloch normalisées avec diffraction dans la direction x [4,5] :

$$\begin{cases} \partial_t e = -\sigma(e-p) + iA\partial_x^2 e \\ \partial_t p = -(1-i\delta)p + ed \\ \partial_t d = -\gamma\left(d - r + \frac{1}{2}\left(ep^* + e^* p\right)\right) \end{cases} \tag{1}$$

Les quantités normalisées e, p et d sont respectivement le champ électrique, la polarisation macroscopique et l'inversion de population. Les paramètres $\gamma = \gamma_\parallel/\gamma_\perp$ et $\sigma = \gamma_\ell/2\gamma_\perp$ se définissent à partir du taux de relaxation de la polarisation $\gamma_\perp$, de l'inversion de population $\gamma_\parallel$ et de l'intensité optique γ_ℓ. Le temps est normalisé par rapport à la durée de vie de la cohérence $\tau_\perp = 1/\gamma_\perp$. Le désaccord de fréquence $\delta = (\omega - \omega_a)/\gamma_\perp$ représente la différence, normalisée, entre la fréquence du champ ω et celle de la transition atomique résonante ω_a. A est le paramètre de diffraction, et r le taux de pompage. L'opérateur différentiel partiel $\partial/\partial t$ $(\partial/\partial x)$ est noté par ∂_t (∂_x). Le système (1) est simulé par un anneau de 71 oscillateurs couplés [6], après le changement de variable $(e, p, d) \mapsto (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, x_5)$.



(a) $A = 0.5155007$ (b) $A = 0.5090$ (c) $A = 0.5000$

(d) $A = 0.4950$ (e) $A = 0.4900$ (f) $A = 0.4800$

FIG. **1.** Diagrammes spatio-temporels du système laser (1). Les autres paramètres : $\sigma = 3$, $\gamma = 1$, $r = 30$ et $\delta = -2$. Les défauts observés en (e) et (f) sont en fait des paires d'annihilation-création n'affectant pas la structure globale des diagrammes. Les annihilations (créations) sont représentées par des cercles en pointillés (continus). Les défauts topologiques de charge nulle — correspondant ainsi à une paire d'annihilation-création — sont désignés par des petits disques blancs.

Pour la gamme de paramètres choisie ici, tous les diagrammes spatio-temporels sont caractérisés par une onde progressive avec des modulations et contiennent parfois des défauts (Figs 1). Un défaut topologique correspond à « un point du milieu où l'amplitude locale est nulle et la phase non définie »[7]. Sur cette gamme des paramètres, tous les oscillateurs de notre anneau sont synchronisés avec un décalage de phase [6] : il est donc possible d'étudier la dynamique à travers une série temporelle issue d'un unique oscillateur de position spatiale x.

La dynamique est étudiée par des portraits de phase reconstruits sur les dérivées successives de l'intensité $I = x_1^2 + x_2^2 = |e|^2$. Un oscillateur laser isolé décrit par les équations (1) avec $A = 0$, donc dans l'espace des phases $\mathbb{R}^5(\boldsymbol{x}) = \mathbb{R}^5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, est étudié *via* la fonction de mesure $h : \mathbb{R}^5(\boldsymbol{x}) \mapsto \mathbb{R}^1(I)$ où I est l'intensité. Le portrait de phase est ensuite reconstruit avec les dérivées successives de l'intensité I, que nous noterons $\boldsymbol{X}$.

L'application $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R}^5(\boldsymbol{x}) \mapsto \mathbb{R}^5(\boldsymbol{X})$ est ainsi une transformation de coordonnées de l'espace des phases original $\mathbb{R}^5(\boldsymbol{x})$ vers l'espace reconstruit $\mathbb{R}^5(\boldsymbol{X})$. $\boldsymbol{\Phi}$ définit un difféomorphisme si elle est injective et si Det $\mathcal{J}_{\boldsymbol{\Phi}} \neq 0$ ($\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$ $(\boldsymbol{x})$), où $\mathcal{J}_{\boldsymbol{\Phi}}$ est la matrice jacobienne de $\boldsymbol{\Phi}$ [8]. Dans notre cas, Det $\mathcal{J}_{\boldsymbol{\Phi}} = 0$ ($\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5(\boldsymbol{x})$), ce qui signifie que la dynamique n'est jamais observable à travers la mesure de l'intensité. Ceci se traduit, par exemple, par le fait que l'onde progressive dans $\mathbb{R}^5(\boldsymbol{x})$ devient un point singulier $\boldsymbol{X}^*$ de $\mathbb{R}^5(\boldsymbol{x})$ correspondant à $I_0 = \overline{e}^2$ où $\overline{e}$ est la solution laser stationnaire [4]. La perte d'observabilité est maximale pour cette onde progressive puisqu'un nombre infini d'états différents de $\mathbb{R}^5(\boldsymbol{x})$ possède pour image un unique point de $\mathbb{R}^5(\boldsymbol{X})$. Il y a alors une forte singularité associée à ce point. Nous devons raisonner sur un oscillateur isolé car il n'existe pas de théorie générale de l'observabilité pour les équations aux dérivées partielles ; toutefois la perte d'observabilité est liée à la complexité des couplages entre les variables et à la dimension du système original [9]. L'observabilité ne peut que se dégrader lors de l'inclusion de l'oscillateur dans un système spatio-temporel, ne serait-ce que parce que la dimension de l'espace des phases augmente [10].

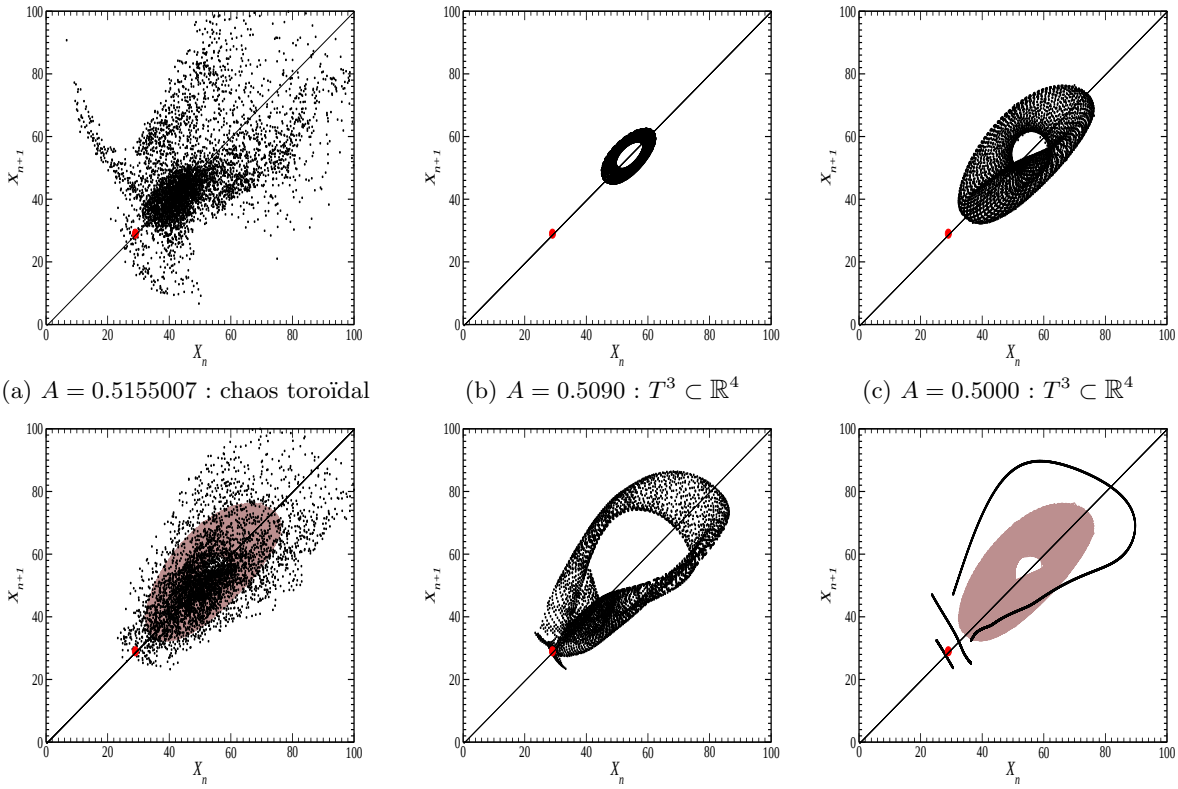
3 Portraits de phase et sections Poincaré

L'intensité a été calculée sur l'oscillateur localisé au point $x = 0$ pour différentes valeurs du paramètre de bifurcation A. Une application de premier retour à une section de Poincaré — définie par $Y_n = \dot{I}_n = 0$ et $\dot{Y}_n < 0$ — a été calculée pour chaque valeur de A.

Le régime observé pour $A = 0.5155006$ est quasi-périodique, caractérisé par un tore T^2 (non montré). Après une bifurcation de Hopf, un autre régime quasi-périodique structuré autour d'un tore T^3 apparait pour $A = 0.5090$ (Fig. 2b). La structure annulaire caractéristique du tore est mise en évidence en utilisant une tranche de la section de Poincaré [11], définie comme une fine couche choisie au « milieu » de la section de Poincaré. Pour retrouver la courbe fermée caractéristique des régimes quasi-périodiques, un tore T^2 doit être « tranché » une fois à l'aide de l'habituelle section de Poincaré. Un tore T^3 nécessite deux étapes : 1) une section de Poincaré dont 2) une tranche est ensuite retenue.

Le tore T^3 (Fig. 2b) est régulier (absence d'auto-intersection), ce qui se traduit par une tranche de l'application de premier retour (ici utilisée comme une reconstruction de la section de Poincaré) se présentant comme une courbe fermée dont la courbure est toujours positive (Fig. 3a). Quand $A = 0.5$, l'application de premier retour ressemble à un tore plissé (Fig. 2c) dont la tranche présente un point où la courbure est négative (Fig. 3b). La courbe de cette tranche est incomplète, la simulation devrait être plus longue pour l'obtention d'une courbe fermée.

L'explosion du tore a lieu pour $A = 0.495$ comme le montre le nuage de points organisés autour du « fantôme » du tore (Fig. 2d). La tranche de l'application de premier retour n'est maintenant plus fermée comme cela devrait l'être : de plus, elle se coupe avec elle-même. Le tore T^3 qui résulte de la crise après un plissement autour de $A = 0.5$ ne peut plus être plongé dans un espace de dimension 4 comme cela était le cas pour un tore T^3 régulier. En conséquence, l'application de premier retour pour $A = 0.49$ (Fig. 2e) présente de petits segments presque perpendiculaires à la première bissectrice localisés au voisinage du point singulier $\boldsymbol{X}^* = \overline{e}^2 = 29$, c'est-à-dire à une forte perte d'observabilité. La tranche d'application de premier retour associée au tore T^3 (Fig. 3c) suggère que la tranche devrait être plongée dans $\mathbb{R}^3$: le tore correspondant n'est donc pas trivial et doit être plongé dans un espace de dimension au moins égale à 5.



(a) $A = 0.5155007$: chaos toroïdal (b) $A = 0.5090 : T^3 \subset \mathbb{R}^4$ (c) $A = 0.5000 : T^3 \subset \mathbb{R}^4$

(d) $A = 0.4950$: chaos toroïdal $\subset \mathbb{R}^5$ (e) $A = 0.4900 : T^3 \subset \mathbb{R}^5$ (f) $A = 0.4800 : T^2 \subset \mathbb{R}^4$

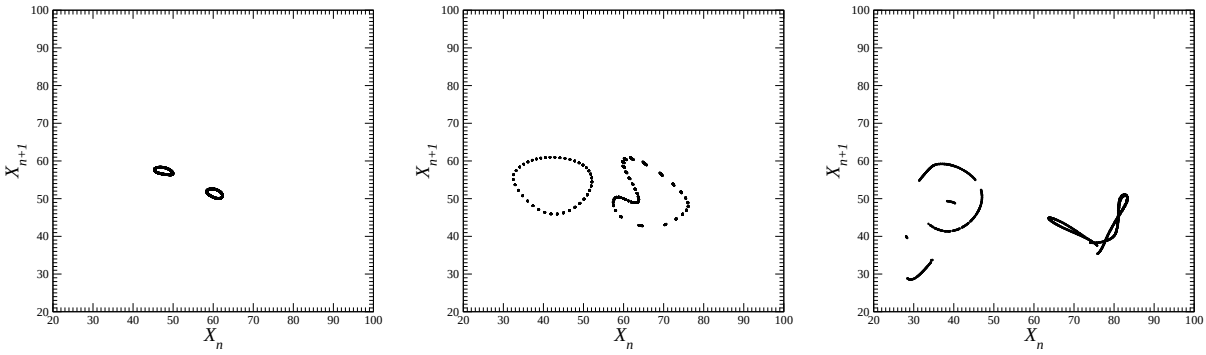
FIG. **2.** Applications de premier retour à une section de Poincaré (X, Z) définie par $Y = 0$ et $\dot{Y} < 0$. Les applications sont construites à partir de la variable $X_n = I_n$, pour des valeurs décroissantes de A. Autres paramètres identiques à ceux de la Fig. 1.

En suivant le même raisonnement, l'application unidimensionnelle observée pour $A = 0.48$ (Fig. 2f) et présentant des segments disjoints implique que la dynamique se structure autour d'un tore T^2 non-trivial nécessitant d'être plongé au moins dans $\mathbb{R}^4$.

La singularité ici est associée à la forte perte d'observabilité au voisinage de $\boldsymbol{X}^*$. La visite de cette singularité implique l'apparition de défauts dans les diagrammes spatio-temporels. Le régime quasi-périodique pour $A = 0.5$ est par contre associé à un diagramme spatio-temporel sans défauts (Fig. 1c) car le voisinage de $\boldsymbol{X}^*$ n'est pas visité. Les défauts sont donc la signature d'une perte d'observabilité qui interdit toute estimation de la phase. Par ailleurs, c'est seulement lorsque l'attracteur chaotique croise la singularité $\boldsymbol{X}^*$ que les auto-intersections de la trajectoire apparaissent, ce qui induit des défauts irréguliers dans le diagramme spatio-temporel (Fig. 1d). Quand la dynamique est de nouveau quasi-périodique ($A = 0.49$ puis $A = 0.48$), les défauts sont encore présents puisque l'attracteur visite toujours le voisinage du point singulier. Dans ce cas, les défauts correspondent à des annihilations et créations quasi-simultanées n'affectant pas la structure globale du diagramme spatio-temporel (Fig. 1e, f). Des défauts irréguliers (Fig. 1a) sont aussi observés pour l'attracteur chaotique toroïdal observé en $A = 0.5155007$.

4 Chaîne de systèmes de Rössler

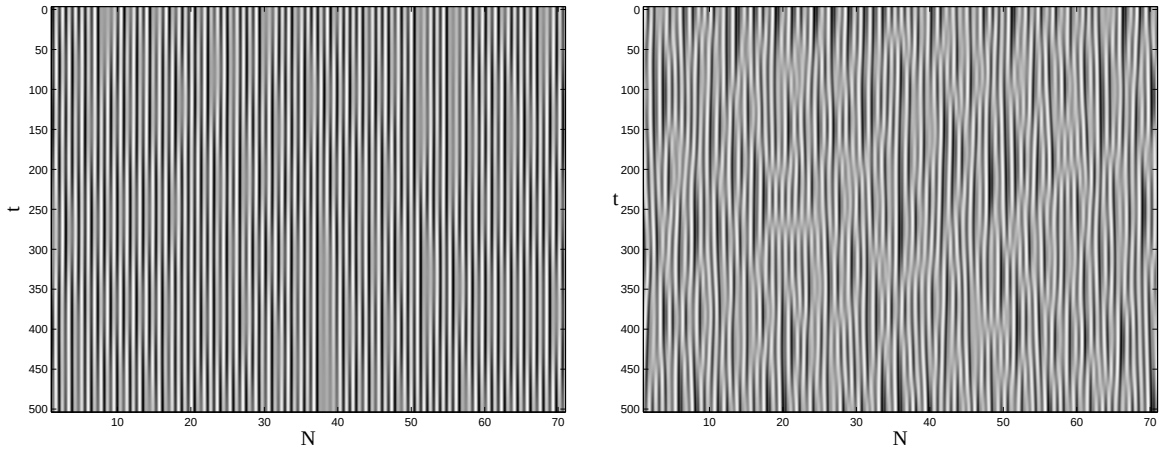
Avec une chaîne de 71 systèmes de Rössler [12] couplés ($\epsilon = 2$) *via* la variable y selon $\epsilon(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1})$ où j désigne le $j^{\text{ème}}$ oscillateur, nous allons montrer que les défauts dans les diagrammes spatio-temporels ne sont pas nécessairement liés à la nature chaotique de la dynamique locale. Les conditions aux limites



(a) $A = 0.5090$ (b) $A = 0.50$ (c) $A = 0.49$

FIG. **3.** Tranches des applications de premier retour à une section de Poincaré représentées en Fig. 2. Les tranches sont définies par $X_n = I_n = X_B \pm 0.06$ où X_B est la coordonnée du barycentre de l'application de premier retour. Autres paramètres identiques à ceux de la Fig. 1.

de la chaîne sont prises libres. Le système de Rössler est ici utilisé lorsqu'il produit un attracteur de type « spirale » possédant une cohérence de phase, et un autre de type « vis » possédant une incohérence de phase [13]. Les diagrammes spatio-temporels ont été calculés pour ces deux cas. Les systèmes de Rössler sont couplés par la variable y qui est une variable telle que l'application $\Phi : \mathbb{R}^3(x, y, z) \mapsto \mathbb{R}^3(y, \dot{y}, \ddot{y})$ est un difféomorphisme global, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune perte d'observabilité [9]. Seule l'incohérence de phase sera alors responsable de l'apparition de défaut.



(a) Cohérence de phase ($a = 0.432$) (b) Incohérence de phase ($a = 0.55$)

FIG. **4.** Diagrammes spatio-temporels pour une chaîne de $N = 71$ systèmes de Rössler dans un régime de cohérence de phase (a) et d'incohérence de phase (b). Autres paramètres : $b = 2$, $c = 4$ et $\epsilon = 2$.

Dans le cas cohérent ($a = 0.432$), le diagramme ne présente aucun défaut (Fig. 4a). Les attracteurs sont en synchronisation de phase puisqu'il n'y a pas de dérive dans les ondes. Lorsque l'on mesure localement la variable y ($N = 1$) pour reconstruire le portrait de phase, la dynamique (chaotique) obtenue est très similaire à celle d'un système de Rössler isolé pour les mêmes valeurs de paramètres. Quand les oscillateurs produisent du chaos avec incohérence de phase ($a = 0.55$), le diagramme spatio-temporel présente clairement des défauts topologiques distribués de manière chaotique (Fig. 4b). Nous avons ainsi montré que l'incohérence de phase est ici responsable de l'apparition des défauts dans les diagrammes

spatio-temporels. Il est donc possible d'avoir une dynamique chaotique n'induisant pas de défauts dans le diagramme spatio-temporel correspondant.

5 Conclusion

La dynamique d'un système laser spatio-temporel a été analysée à l'aide de portraits de phase, d'applications de premier retour, de « tranches » de sections de Poincaré et de diagrammes spatio-temporels. Lorsque les régimes quasi-périodiques ou chaotiques sont associés à des attracteurs traversant le voisinage du point singulier $\boldsymbol{X}^*$, des défauts apparaissent dans les diagrammes spatio-temporels. Le voisinage de $\boldsymbol{X}^*$ est visité de façon quasi-periodique (chaotique) lorsque le régime est quasi-périodique (chaotique). Par conséquent, la distribution des défauts dans les diagrammes reflète la nature de la dynamique.

Ainsi, l'existence de singularité dans l'application de l'espace des phases original vers l'espace reconstruit à partir de l'intensité induit des tores T^n non-triviaux, qui ne peuvent plus être plongés dans $\mathbb{R}^{n+1}$ mais au moins dans $\mathbb{R}^{n+2}$. La première difficulté rencontrée avec ces tores réside dans les sections de Poincaré qui ne sont plus des courbes fermées mais des courbes avec auto-intersections et/ou sous forme de segments disjoints. De telles propriétés résultent d'un défaut d'observabilité où, par définition, la phase n'est plus définie. C'est cette perte d'observabilité qui est responsable de l'apparition des défauts dans les diagrammes spatio-temporels.

Nous avons ainsi montré que la distribution des défauts dans les diagrammes spatio-temporels reflète la dynamique avec laquelle la trajectoire visite le voisinage de singularité de l'application $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R}^5(\boldsymbol{x}) \mapsto \mathbb{R}^5(\boldsymbol{X})$. La distribution des défauts est ainsi une signature suffisante de la dynamique sous-jacente mais pas nécessaire. C'est ainsi que, dans le cas d'une chaîne de systèmes de Rössler, nous avons montré que des régimes chaotiques avec cohérence de phase pouvaient être observés sans aucun défaut dans les diagrammes spatio-temporels correspondants.

Références

1. M. C. Cross & P. C. Hohenberg, Pattern formation outside of equilibrium, *Reviews of Modern Physcics*, **65** (3), 851-1123 (1993).
2. F. Takens, Detecting strange attractors in turbulence, *Lecture Notes in Mathematics*, **898**, 366-381 (1981).
3. S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares & C. S. Zhou, The synchronization of chaotic systems, *Physics Reports*, **366**, 1 (2002).
4. D. Amroun, M. Brunel, C. Letellier, H. Leblond & F. Sanchez, Complex intermittent dynamics in large-aspect-ratio homogeneously broadened single-mode lasers, *Physica D*, **203**, 185-197 (2005).
5. P. K. Jakobsen, J. V. Moloney, A. C. Newell & R. Indik, Space-time dynamics of wide-gain-section lasers, *Physics Review A*, **45**, 8129-8137 (1992).
6. D. Amroun Aliane, L. Pastur & C. Letellier, Defects in spatio-temporal diagrams and their relations to phase coherence and lacks of observability, *Physics Review E*, submitted
7. J. Davidsen & R. Kapral, Defect-mediated turbulence in systems with local deterministic chaos, *Physical Review Letters*, **91** (5), 058303 (2003).
8. C. Letellier, L. A. Aguirre & J. Maquet, Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Physical Review E*, **71**, 066213 (2005).
9. C. Letellier & L. A. Aguirre, Investigating nonlinear dynamics from time series : the influence of symmetries and the choice of observables, *Chaos*, **12**, 549-558 (2002).
10. C. Letellier & L. A. Aguirre On the interplay among synchronization, observability and dynamics *Physical Review E*, **82**, 016204 (2010).
11. M. Klein, G. Baier & O. E. Rössler, From n-tori to hyperchaos, *Chaos, Solitons & Fractals*, **1** (2), 105-118 (1991).
12. O. E. Rössler, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398 (1976).
13. C. Letellier, P. Dutertre & B. Maheu, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282 (1995).