

Forme et persistance de tourbillons lenticulaires dans les écoulements stratifiés tournants : du laboratoire à la Tâche Rouge de Jupiter !

Orian Aubert¹, Michael Le Bars¹, Patrice Le Gal¹ & Philip Marcus²

¹ I.R.P.H.E., 49 rue F. Joliot-Curie, 13384, Marseille, France

² Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkeley, CA94720, USA
aubert@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. La Grande Tâche Rouge de Jupiter et les meddies de l'Océan Atlantique sont les exemples les plus connus de tourbillons anticycloniques lenticulaires existant dans les écoulements stratifiés tournants. Leurs formes et leurs persistance restent cependant énigmatiques alors que l'existence de la Tâche Rouge de Jupiter est déjà mentionnée par Cassini au 17^{ème} siècle. Les meddies persistent quant à eux pendant plusieurs années dans l'Océan Atlantique en ayant encapsulé de l'eau méditerranéenne. Grâce à l'équilibre des différentes forces agissant sur le fluide à l'intérieur des tourbillons, il nous a été possible de comprendre leur persistance et de prédire leur rapport d'aspect vertical qui est proportionnel au rapport $\frac{f}{N}$ de la fréquence de rotation et de la fréquence de Brunt-Väisälä, multiplié par la racine du nombre de Rossby. Nos expériences montrent que cette loi d'échelle est respectée par ces tourbillons depuis l'échelle du laboratoire jusqu'à la Tâche Rouge de Jupiter.

Abstract. The Great Red Spot of Jupiter and the meddies of the Ocean Atlantic are the best known examples of anticyclonic lenticular vortices living in rotating and stratified flows. Their forms and their persistence are however rather puzzling whereas the existence of the Great Red Spot of Jupiter is already mentioned by Cassini in the 17th century. The meddies persist for several years in the Atlantic Ocean, with encapsulated mediterranean sea water. Balancing the different forces acting on the fluid inside the vortex, it was possible to understand and predict their persistence and their vertical aspect ratio which is found to be proportional to the ratio $\frac{f}{N}$ of the rotation frequency and the Brunt-Väisälä frequency, multiplied by the square root of the Rossby number. Our experiments show that this scaling law is respected by these vortices from the laboratory scale up to the Great Red Spot of Jupiter.

1 Introduction

Des écoulements très complexes ont lieu dans l'atmosphère externe de Jupiter : bandes alternées de forts vents zonaux superposées à des structures tourbillonnaires intenses et fortement turbulentes, dont la célèbre Grande Tache Rouge (GRS) qui a été observée par les astronomes depuis le 17^{ème} siècle. La GRS est une énorme structure anticyclonique de tailles typiques 25000 km de long et 12000 km de largeur. La vitesse du fluide à l'intérieur de la GRS atteint 100 km/h. Son épaisseur a été récemment évaluée à partir de mesures thermiques [1,2] à environ 46 km. En fait, ces structures tourbillonnaires ne sont pas inhabituelles dans les atmosphères des planètes géantes gazeuses, mais la GRS reste remarquable en raison de sa longévité. Des tourbillons de forme lenticulaire qui persistent à long terme ont également été observés dans les océans depuis les années 70 [3,4]. En particulier, les meddies [5] (tourbillons d'eau méditerranéenne) sont des tourbillons anticycloniques que l'on trouve essentiellement dans l'Océan Atlantique Nord-Est, et qui contiennent de l'eau chaude et salée d'origine méditerranéenne, piégée dans un coeur pouvant être relativement homogène. Les meddies ont des diamètres typiques de l'ordre de 100 km et des extensions verticales de l'ordre de 1 km. Leur durée de vie peut aller jusqu'à plusieurs années.

D'un point de mécanique des fluides, la Tâche Rouge de Jupiter et les meddies appartiennent au même type de systèmes : ceux sont des tourbillons anticycloniques qui évoluent dans un milieu stratifié tournant et qui persistent sur des durées étonnement longues. Ces deux ingrédients (rotation et stratification) ont *a priori* des conséquences antagonistes. D'une part, la stratification verticale de densité et mesurée par

la fréquence de Brunt-Väisälä $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}}$ (où ρ , est la densité du fluide, z la coordonnée verticale et g l'accélération de la pesanteur), limite les mouvements le long du gradient de densité. D'autre part, la rotation de la planète caractérisée par le paramètre de Coriolis $f = 2 \Omega \sin \phi$, où le taux de rotation Ω de la planète est pondéré par la latitude locale ϕ . Cette force homogénéise l'écoulement le long de l'axe de rotation en accord avec le théorème de Proudman-Taylor. La stabilité des tourbillons dans un milieu en rotation est relativement bien connue [6,7] de même que la dynamique des tourbillons dans les fluides stratifiés [8,9], par contre très peu d'études ont combiné les deux effets, en particulier d'un point de vue expérimental [10]. Nous montrons ici que le compromis entre l'effet dû à la rotation d'une part et celui dû à la stratification d'autre part est la source de génération et d'équilibre de ces tourbillons cohérents et stables qui souvent possèdent une forme typique lenticulaire.

2 Etude expérimentale des tourbillons dans une cuve tournante, stratifiée en eau salée

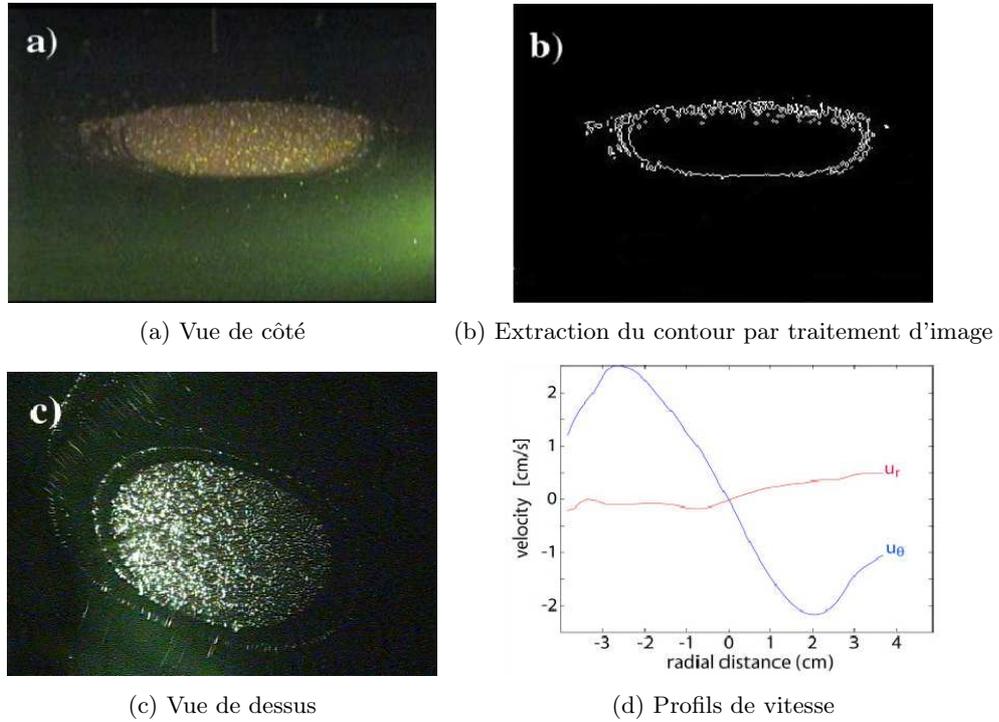


FIG. 1. Tourbillon anticyclonique généré dans notre expérience pour $N = 2.3$ rad/s, $f = 2$ rad/s. Le contour est extrait par traitement d'image afin de déterminer le rapport d'aspect $\alpha = 0.3$ (épaisseur 3.8 cm et diamètre 12.6 cm). Les profils de vitesse dans un plan horizontal et le long d'un diamètre sont obtenus par mesure PIV à partir de visualisations telles que celle de la figure (c).

Nous avons effectué une étude expérimentale systématique de tourbillons lenticulaires en ne gardant que les deux principaux ingrédients : la stratification et la rotation. La rotation est reproduite expérimentalement en utilisant un réservoir transparent de dimensions $L \times L \times H = 50 \times 50 \times 70$ cm fixé sur une table tournante. En utilisant la méthode classique dite du "double bucket", une stratification linéaire d'eau salée est réalisée dans la cuve : des stratifications avec une fréquence de Brunt-Väisälä N variant de 1,2 à 1,8 rad/s sont faciles à obtenir. Une fois l'état de rotation solide atteint (la vitesse de rotation Ω est comprise entre 0,8 et 3,5 rad/s dans nos expériences, ce qui correspond à un paramètre

de Coriolis $f = 2 \Omega$ variant de 1,6 à 7 rad/s), nous injectons suivant l'axe de rotation de la table et à la profondeur correspondante un petit volume de fluide homogène et isodensité coloré à l'aide de fluorescéine et encensé de particules de diamètre $100\mu\text{m}$ afin de réaliser de l'anémométrie par images de particules (PIV). Dès qu'il est injecté, le liquide coloré est dévié horizontalement par la stratification et la force de Coriolis l'organise rapidement sous la forme d'un anticyclone. Nous avons ensuite suivi son évolution temporelle en se servant de deux systèmes de visualisation utilisant des nappes laser et des caméras vidéo. Une coupe verticale permet de suivre l'évolution du rapport d'aspect au fil du temps par traitement d'images (Figs 1a et 1b). Une coupe horizontale suivie d'un post-traitement PIV permet de mesurer le champ de vitesse horizontale (Figs 1c et 1d) et ainsi déterminer le nombre de Rossby du vortex qui est défini par $\text{Ro} = -\Omega_v/f$ où Ω_v est la vitesse de rotation du tourbillon en son centre. Comme on le voit sur la figure 1d), le coeur du vortex est en rotation solide et la vitesse radiale u_r reste négligeable par rapport à la vitesse azimutale u_θ . Dans toutes nos expériences, cet état comme illustré sur les figures 1 persiste pendant des durées très longues d'environ 1000 à 1800 périodes de rotation, avec une atténuation progressive du nombre de Rossby.

3 Modélisation des tourbillons dans un fluide stratifié tournant

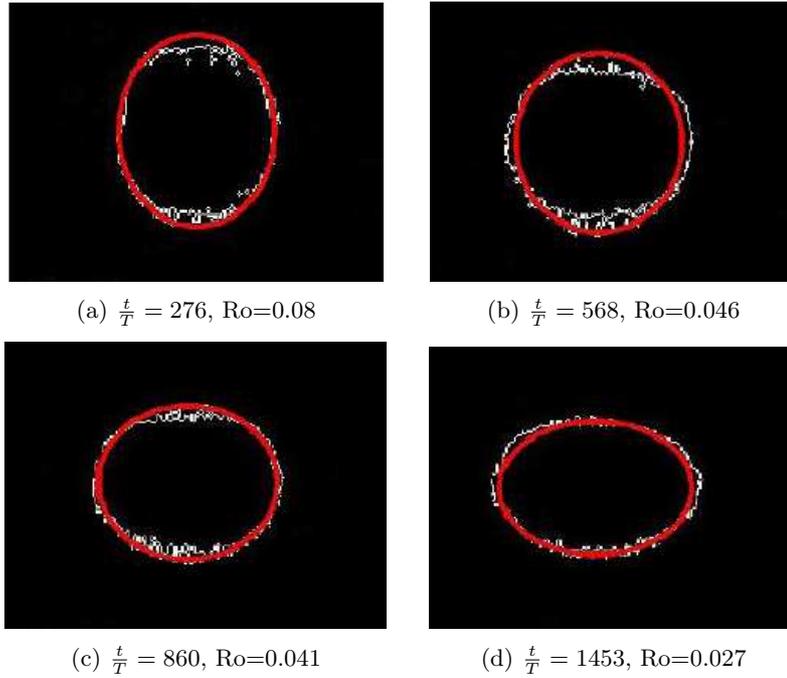


FIG. 2. Contours (en blanc) du tourbillon, extraits par traitement d'image à différents temps pour $\frac{f}{N} = 4,25$ comparés aux profils théoriques (en rouge) donnés par l'équation 2. Le volume $V = 60$ ml du vortex est déterminé par une première image par simple extrapolation de sa forme. Ro est le nombre de Rossby number mesuré par PIV à chaque temps $\frac{t}{T}$ compté en nombre de tours de la table tournante.

Dans la configuration étudiée, les équations d'Euler incompressibles linéarisées et écrites en coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans le référentiel en rotation, se réduisent à un simple équilibre géostrophique dans le plan horizontal et à un équilibre hydrostatique dans la direction verticale (équations 1). En effet, en prenant comme référence l'environnement fixe et stratifié linéairement avec $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\Delta\rho}{dz} = \text{cste}$, où $\Delta\rho(z)$ est la stratification imposée linéaire, nous supposons que l'intérieur du tourbillon est en rotation solide anticyclonique $u_\theta = -\Omega_v r$ et caractérisé par l'anomalie de densité $\rho' = -\Delta\rho(z)$. Les équations

s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho_0 f u_\theta = -\rho_0 f \Omega_v r \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho' = -N^2 \rho_0 z \end{cases} \quad (1)$$

où p est l'anomalie de pression entre l'intérieur et l'extérieur du tourbillon. Une anomalie locale ρ' de densité crée un gradient de pression, qui génère à son tour la vitesse azimutale. En réalité, la viscosité assure la continuité du profil de vitesse à la frontière du tourbillon provoquant ainsi la lente décroissance du nombre de Rossby. Néanmoins, les équations 1 restent valables car cette évolution se fait de manière quasistatique.

L'intégration du système d'équations 1 donne la pression à n'importe quel endroit (r, z) dans le tourbillon, en fonction d'une simple inconnue p_{00} correspondant à la pression au centre du tourbillon. A l'extérieur de celui-ci, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et $p = 0$. La forme auto-similaire du tourbillon est alors obtenue par la continuité de l'anomalie de pression avec l'environnement :

$$p_{00} = \rho_0 \frac{Ro f^2}{2} r^2 + \rho_0 \frac{N^2}{2} z^2 \quad (2)$$

A partir de cette équation, il est possible d'obtenir la loi d'échelle pour le rapport d'aspect α entre l'épaisseur et le diamètre du vortex : $\alpha = (f/N) Ro^{1/2}$. Ce résultat est le résultat principal de notre étude. La proportionnalité entre α et le rapport de f/N avait déjà été établie par les expériences de Hedstrom & Armi [10], mais la dépendance en Ro qu'ils avaient trouvée était linéaire, alors que nous prétendons qu'elle est en $Ro^{1/2}$. Cependant, il semble que dans leurs expériences, les tourbillons étaient au moment des mesures encore non-axisymétriques, avec des éjections de vorticité dans l'environnement stratifié. Ainsi, nous pensons que les tourbillons produits dans cette expérience n'étaient pas en équilibre géostrophique. L'équation donnant la forme du vortex permet de déterminer le volume V de fluide à l'intérieur du vortex, volume qui est directement lié à la pression interne inconnue p_{00} par l'équation suivante :

$$p_{00} = \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{9 V^2 Ro^2 N^2 f^4}{4 \pi^2} \right)^{1/3} . \quad (3)$$

Un exemple de l'évolution temporelle d'un vortex dans le plan vertical est représenté sur la figure 2. Après l'injection, l'équilibre du tourbillon étant obtenu, nous déterminons la meilleure valeur de p_{00} pour dessiner le contour du vortex. Cette valeur de p_{00} permet alors de déduire le volume de fluide à l'intérieur du vortex. En supposant qu'il n'y a pas de perte de ce volume au cours de l'évolution du tourbillon, p_{00} est alors recalculée pour chaque image avec le nombre de Rossby déterminé simultanément par des mesures PIV dans le plan horizontal. Les formes théoriques obtenues se superposent remarquablement bien avec les vrais contours pour les temps longs comme le montre la figure 2. Notons qu'aucun paramètre ajustable autre que le volume initial n'a été utilisé pour la prédiction qui s'avère être remarquable.

4 La longévité exceptionnelle des tourbillons en milieu stratifié tournant

Comme nous l'avons déjà indiqué, la source de l'équilibre interne du tourbillon provient de l'anomalie de densité : le tourbillon persiste aussi longtemps que cette anomalie existe. Dans nos expériences, la disparition de l'anomalie de densité est essentiellement due à la diffusion du sel à l'interface du vortex. Pour vérifier cela, nous avons effectué des simulations numériques directes de notre écoulement. A partir d'un volume de fluide homogène et isodensité placé dans un environnement salin stratifié linéairement, on résout numériquement les équations de Navier-Stokes axisymétriques couplées à une équation d'advection-diffusion pour la concentration en sel. Nous avons ensuite suivi l'évolution temporelle du nombre de Rossby pour plusieurs valeurs de la diffusion du sel représenté par le nombre de Schmidt. Les résultats présentés sur la figure 3 confirme que l'échelle de temps de l'évolution du tourbillon est directement liée au nombre Schmidt. Dans nos expériences comme dans l'océan, ce nombre vaut $Sc = 700$ et on peut

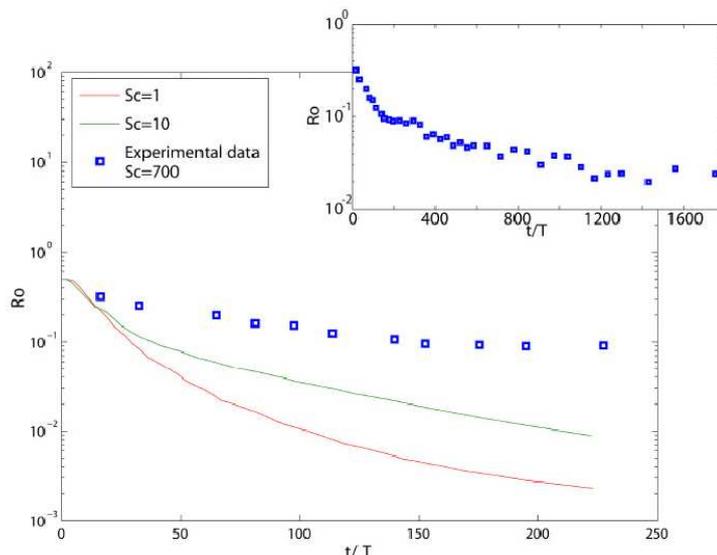


FIG. 3. Evolution du nombre de Rossby d'un vortex en fonction du temps. Mesures expérimentales (carrés) comparées aux résultats des simulations numériques directes (lignes pleines) pour plusieurs valeurs de la diffusivité du sel mesurée par le nombre de Schmidt. L'évolution expérimentale à temps très longs est représentée dans l'encart.

remarquer que la durée de vie meddies est de l'ordre de 4 ans, ce qui donne à près de 1400 périodes de rotation de la Terre ce qui correspond tout-à-fait avec la durée de vie de nos tourbillons expérimentaux en termes de nombre de tours de la table. Dans l'atmosphère de Jupiter, les processus de diffusion sont très rapides, mais les effets thermiques dynamiques doivent également être prises en compte. Comme le montre Marcus et al. [12], le rayonnement rapide de la chaleur à la surface de la GRS est compensé par une forte recirculation à l'intérieur du vortex, qui est en conséquence entièrement mélangé. Ainsi, l'anomalie de densité est maintenue en continu et les équations d'équilibre 1 restent valables.

5 Loi d'échelle universelle : du laboratoire à la tâche rouge de Jupiter

Pour comparer directement les résultats expérimentaux avec des mesures d'objets géophysiques, les valeurs trouvées dans la littérature correspondant à la Tâche Rouge de Jupiter et aux meddies [13,14,15] ont été placés dans un graphe ($\alpha N/f, Ro^{1/2}$) dans la figure 4. Y compris pour nos données expérimentales, la plage de nombre de Rossby couverte va de 0,02 à 0,3 et les gammes de $\alpha N/f$ de 0,13 à 0,6. Comme on peut le constater sur la figure, tous les points suivent la même tendance linéaire, montrant l'universalité de notre mise à l'échelle $\alpha = (f/N) Ro^{1/2}$.

6 Conclusion

En conclusion, nous avons démontré par cette étude que les tourbillons anticycloniques en milieu stratifié tournant ont des formes typiques dont le rapport d'aspect suit une loi d'échelle universelle qui peut être dérivée des premiers principes de la mécanique des fluides. L'exceptionnelle longévité de ces tourbillons provient de la persistance d'une anomalie de densité, qui est maintenue sur une durée beaucoup plus grande que l'échelle de temps visqueux, puisque dictée par la lente diffusion chimique au sein du fluide. Ce comportement validé par des expériences de laboratoire s'applique universellement à des vortex géophysiques et en particulier à la Tâche Rouge de Jupiter.

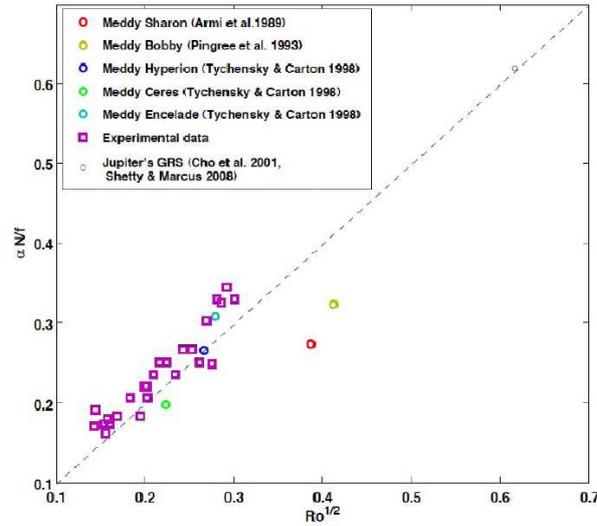


FIG. 4. Vérification de la loi d'échelle par les résultats expérimentaux, les données concernant la Tâche Rouge de Jupiter et les données pour différents Meddies connus dans la littérature.

Références

1. J. Y.-K. CHO, M. DE LA TORRE JUAREZ, A. P. INGERSOLL & D. G. DRITSCHER, A high resolution, three-dimensional model of Jupiter's Great Red Spot, *Journal of Geophysical Researches*, **106**, 5099-5105 (2001).
2. S. SHETTY, & P. S. MARCUS, Changes in Jupiter's Great Red Spot, *soumis*.
3. J. C. MACWILLIAMS, Submesoscale coherent vortices in the ocean, *Reviews in Geophysics*, **23**, 165-183 (1985).
4. D. B. OLSON, Rings in the ocean, *Annual Review in Earth and Planets Science*, **19**, 283-311 (1991).
5. L. ARMI & W. ZENK, Large lenses of highly saline Mediterranean water, *Journal of Physical Oceanography*, **14**, 1560-1576 (1984).
6. E. J. HOPFINGER & G. J. F. VAN HEIJST, Vortices in rotating fluids, *Annual Review in Fluid Mechanics*, **19**, 283-311 (1991).
7. G. J. F. VAN HEIJST & H. J. H. CLERCX, LABORATORY MODELING OF GEOPHYSICAL VORTICES, *Annual Review in Fluid Mechanics*, **41**, 143-164 (2009).
8. P. BILLANT & J.-M. CHOMAZ, EXPERIMENTAL EVIDENCE FOR A NEW INSTABILITY OF A VERTICAL COLUMNAR VORTEX PAIR IN A STRONGLY STRATIFIED FLUID, *Journal in Fluid Mechanics*, **418**, 167-188 (2000).
9. R. GODOY-DIANA, J.-M. CHOMAZ & P. BILLANT, VERTICAL LENGTH SCALE SELECTION FOR PANCAKE VORTICES IN STRONGLY STRATIFIED VISCOUS FLUIDS, *Journal in Fluid Mechanics*, **504**, 229-238 (2004).
10. K. HEDSTROM & L. ARMI, AN EXPERIMENTAL STUDY OF HOMOGENEOUS LENSES IN A STRATIFIED ROTATING FLUID, *Journal in Fluid Mechanics*, **191**, 535-556 (1988).
11. L. ARMI, D. HEBERT, N. OAKEY, J. PRICE, P. L. RICHARDSON, T. ROSSBY & B. RUDDICK, THE HISTORY AND DECAY OF A MEDITERRANEAN SALT LENS, *Nature*, **333**, 649-651 (1988).
12. P. S. MARCUS, X. ASAY-DAVIS, M. H. WONG & I. DE PATER, Jupiter's new red oval : dynamics, color and relationship to Jovian climate change, *soumis*.
13. L. ARMI, H. DAVE, N. OAKEY, J. F. PRICE, P. L. RICHARDSON, H. T. ROSSBY & B. RUDDICK, Two years in the life of a Mediterranean salt lens, *Journal on Physical Oceanography*, **19**, 354-370 (1989)
14. R. D. PINGREE & B. LE CANN, A shallow meddy (a smeddy) from the secondary Mediterranean salinity maximum, *Journal in Geophysical Researches*, **98** (C11), 169-185 (1989)
15. A. TYCHENSKY & X. CARTON, Hydrological and dynamical characterization of Meddies in the Azores region : A paradigm for baroclinic vortex dynamics, *Journal on Geophysical Researches*, **103** (C11), 61-79 (1989).