

# Instabilités centrifuges dans un écoulement de cavité : décomposition en modes dynamiques

Christelle Douay<sup>2,3</sup>, Florimond Guéniat<sup>1,3</sup>, Luc Pastur<sup>1,3</sup>, François Lusseyran<sup>3</sup>, & Thierry Faure<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex

<sup>2</sup> Université Pierre & Marie Curie, 4 place Jussieu, F-75005 Paris, France

<sup>3</sup> LIMSI-CNRS BP 133, F-91403 Orsay Cedex

christelle.douay@limsi.fr

**Résumé.** Les structures intra-cavitaires d'un écoulement de cavité ouverte sont identifiées, pour la première fois, par une analyse en modes dynamiques sur des champs de vitesse mesurés dans un plan transverse horizontal. L'organisation spatiale et la dynamique de ces structures est discutée.

**Abstract.** Structures inside a cavity flow are, for the first time, identified by performing a dynamic mode decomposition on PIV measurements in a top-view plane. Structure spatial organisation and dynamics are discussed.

## 1 Introduction

Nous cherchons à identifier les structures intra-cavitaires qui se forment dans un écoulement de cavité, à partir de mesures du champ de vitesse dans un plan horizontal situé à l'intérieur de la cavité. Les caractéristiques dynamiques de ces structures, révélées par les traceurs passifs utilisés pour l'ensemencement du fluide, sont noyées dans un champ de vitesse complexe, dont on mesure les trois composantes dans le plan. La composante perpendiculaire au plan est fortement bruitée et difficilement exploitable. Afin d'extraire ces structures, nous utilisons une technique de décomposition en modes dynamiques, récemment introduite par P. Schmid [7,8]. Nous présentons ici les modes dynamiques caractéristiques des structures intra-cavitaires qui résultent d'une instabilité centrifuge.

## 2 Dispositif expérimental

L'écoulement est engendré par une soufflerie basse vitesse et permet d'obtenir une couche limite laminaire en amont d'une cavité parallélépipédique de longueur  $L = 75$  mm, profondeur  $H$  et envergure  $S = 300$  mm (Fig. 1). La configuration étudiée ici est une cavité ouverte, c'est-à-dire sans réattachement de l'écoulement avant le bord aval, de rapport  $L/H = 1.5$ . La vitesse de l'écoulement extérieur à la couche limite vaut  $U = 0.69$  m·s<sup>-1</sup> pour un nombre de Reynolds basé sur la profondeur de  $Re_H = UH/\nu = 2300$ . Une couche de cisaillement se développe entre la cavité et l'écoulement extérieur, instable vis-à-vis de modes de Kelvin-Helmholtz [4] (Fig. 2a). L'interaction de la couche cisailée avec le coin aval de la cavité conduit à des oscillations auto-entretenues de l'écoulement, qui se traduisent par des raies caractéristiques dans le spectre, ici  $f \simeq 3.7$  Hz. La courbure induite par la recirculation intra-cavitaire, que l'on peut apercevoir sur la Fig. 2a), est responsable, sur une certaine plage des paramètres de contrôle  $U$ ,  $L/H$  et  $S/H$ , du développement d'instabilités centrifuges. Dans le régime non-linéaire saturé, cela donne naissance à des structures de vorticité, toriques, contra-rotatives, du type Taylor-G rtler [1,2]. On peut apercevoir une coupe transverse de ces structures sur la Fig. 2b. La présence des bords latéraux, en  $z/S = \pm 1/2$ , engendre un pompage d'Eckman responsable d'une dérive des tourbillons de Taylor-G rtler vers les bords latéraux. On constate que le plan de séparation entre les tourbillons dérivant vers le bord gauche ou le bord droit, n'est pas précisément le pan médian de la cavité, mais qu'il est légèrement déporté, dans notre expérience en  $z_c/S = 0.067$ .

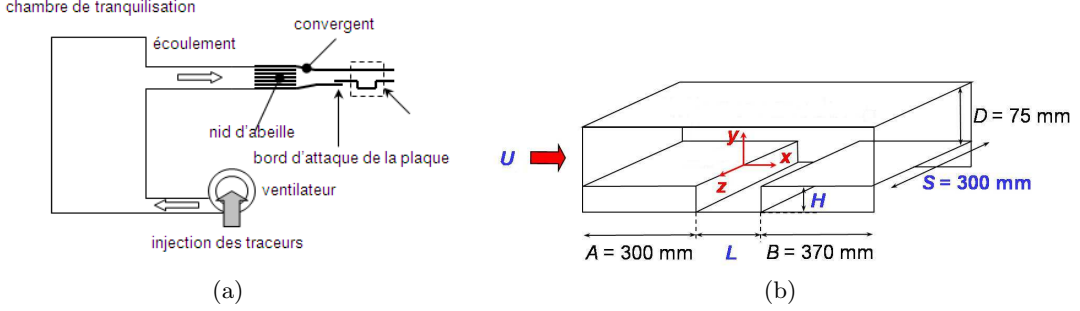


FIG. 1. Schéma de (a) la veine d'essais, (b) de la cavité.

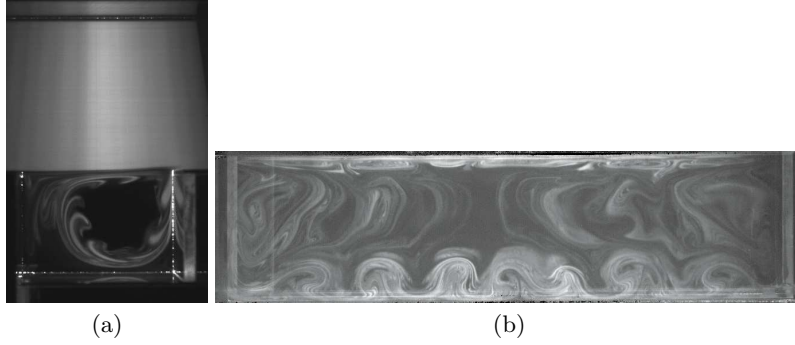


FIG. 2. Visualisation instantanée de l'écoulement réalisée avec de la fumée de spectacle, pour  $L/H = 1.5$ ,  $S/H = 6$  et un nombre de Reynolds  $Re_H$  typique de notre étude. (a) En vue de face dans un plan  $(x, y)$ , (b) en vue de dessus dans un plan  $(x, z)$  situé en  $y/H = -0.3$  à l'intérieur de la cavité. On y distingue notamment la couche cisailée et la recirculation intra-cavitaire (figure de gauche), et une coupe des structures de Taylor-Görtler révélées par l'ensemencement (figure de droite).

Les mesures sont réalisées dans un plan horizontal  $(x, z)$  situé à l'intérieur de la cavité, dans la partie supérieure, à  $y/H = -0.3$  sous plan affleurant. Deux caméras 10 bits de résolution  $1032 \times 732$  pixels, permettent l'enregistrement d'une séquence d'images. Une nappe lumineuse, d'épaisseur 0.25 mm, est obtenue avec un laser YAG pulsé qui émet des impulsions de 250 mJ dont la longueur d'onde est 532 nm. La fréquence d'échantillonnage est de 5 Hz et la durée totale de l'enregistrement est d'environ 200 s. Le champ de vitesse est obtenu par velocimétrie par images de particules stéréoscopique, à l'aide d'un algorithme de flot optique par programmation dynamique orthogonale [5], et l'ensemble de mesure utilisé dans la suite est constitué des champs de fluctuations de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = u_z(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_z + u_x(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_x$  par rapport au champ moyen. La composante  $u_y$ , perpendiculaire au plan mesure, est très bruitée et n'est pas exploitée. La signature fréquentielle des structures intra-cavitaires se situe dans la gamme du Hertz, leur dynamique est donc résolue en temps.

### 3 Modes dynamiques intra-cavitaires

#### 3.1 Décomposition en modes dynamiques

On considère l'ensemble des données,  $V_0^{N-1}$ , constitué des  $N$  premières réalisations du champ de vitesse fluctuant, et l'on suppose l'existence d'un opérateur d'évolution,  $A$ , tel que [7,8,6,3] :

$$V_0^{N-1} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\} = \{\mathbf{u}_0, A\mathbf{u}_0, \dots, A\mathbf{u}_{N-2}\}, \quad (1)$$

les indices correspondant aux différents temps  $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$  de la mesure. L'opérateur  $A$  décrit ainsi l'évolution temporelle de l'observable  $\mathbf{u}$ , qui résulte d'un processus non-linéaire, l'écoulement étant supposé décrit par les équations de Navier-Stokes. Les fonctions propres  $\phi_i$  de  $A$ , associées aux valeurs propres

$\lambda_i$ ,  $A\phi_i = \lambda_i\phi_i$ , sont caractéristiques de la dynamique temporelle du champ  $\mathbf{u}$ . La famille des  $\{\phi_i\}$  est de dimension infinie et l'on suppose qu'elle forme une base pour décrire toute réalisation du champ de vitesse :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \geq 1} \phi_i(t) \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (2)$$

$\boldsymbol{\alpha}_i$  étant la projection de  $\mathbf{u}$  sur la base des  $\{\phi_i\}$ . Les  $\boldsymbol{\alpha}_i$  sont définis comme les modes dynamiques. On remarque encore, d'après l'équation (1), que la relation (2) peut se réécrire, par récurrence sur le temps :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i^{k-1} \phi_i(t_0) \boldsymbol{\alpha}_i. \quad (3)$$

La détermination des  $(\phi_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$  repose sur l'hypothèse que le champ  $\mathbf{u}_N$  peut s'écrire comme la combinaison linéaire des réalisations contenues dans  $V_0^{N-1}$  :

$$\mathbf{u}_N = c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_{N-1} \mathbf{u}_{N-1}, \quad (4)$$

En remarquant, d'après (1), que  $AV_0^{N-1} = V_1^N$ , il résulte de l'hypothèse (4) que l'on peut introduire une matrice  $C$ , dite matrice compagnon, telle que  $AV_0^{N-1} = V_0^{N-1}C + R$ , avec

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \vdots & c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

et  $R$  une matrice résidu, qui tend vers zéro lorsque la condition (4) est strictement vérifiée. La matrice  $C$  est de dimension  $N \times N$  et les  $c_j$  sont déterminés, d'après l'égalité (4), en minimisant la norme du vecteur différence  $(\mathbf{u}_N - \sum_{j=1}^{N-1} c_j \mathbf{u}_j)$ . Les opérateurs  $A$  et  $C$  étant similaires si le résidu  $R$  est nul, ils partagent les mêmes valeurs propres et leurs vecteurs propres, respectivement  $\mathbf{v}_j$  et  $\boldsymbol{\alpha}_j$ , sont liés par la relation  $\boldsymbol{\alpha}_j \simeq V_0^{N-1} \mathbf{v}_j$ . Il est donc possible de déterminer, empiriquement à partir de l'ensemble  $V_0^{N-1}$ , les fonctions propres  $\{\phi_i\}$  de  $A$ , et d'écrire :

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{k-1} \phi_i(t_0) \boldsymbol{\alpha}_i. \quad (6)$$

L'ensemble des conditions initiales  $\{\phi_i(t_0)\}$  est déterminée en projetant  $\mathbf{u}_0$  sur les  $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ .

### 3.2 Modes dynamiques et tourbillons de Taylor-Görtler

Pour des raisons de ressources mémoires limitées, les modes dynamiques ont été calculés sur une zone réduite du champ de cavité de  $500 \times 200$  pixels ( $138 \times 51$  mm<sup>2</sup>), centrée sur  $z_c$ . Les modes associés aux composantes  $u_x$  et  $u_z$  du champ de vitesse ont été déterminés séparément.

Sur la Fig. 3, on voit que les valeurs propres de la décomposition se distribuent sur le cercle unité, ce qui indique que le régime dynamique évolue sur un attracteur [6]. Les spectres d'amplitude de la Fig. 4 représentent l'amplitude des modes dynamiques  $\alpha_k(\mathbf{r})$ , moyennée sur la grille spatiale, en fonction de la fréquence  $f_k = \frac{\ln \lambda_k}{2i\pi \Delta t}$ . Les spectres obtenus, selon que les modes sont déterminés sur  $u_x$  ou  $u_z$ , exhibent les trois mêmes pics principaux, à  $f_1 = 0.13$  Hz (pic repéré par un cercle ouvert),  $f_2 = 0.22$  Hz (pic repéré par un cercle plein) et  $f_3 = 0.005$  Hz, avec des amplitudes relatives différentes et un spectre plus bruité pour  $u_z$ . Un petit pic à la fréquence  $f_4 = 1.33$  Hz est également visible dans les spectres, qui correspond au repliement de la fréquence d'oscillation de la couche de mélange, détectée aux alentours de 3.7 Hz (la fréquence de Nyquist vaut 2.5 Hz).

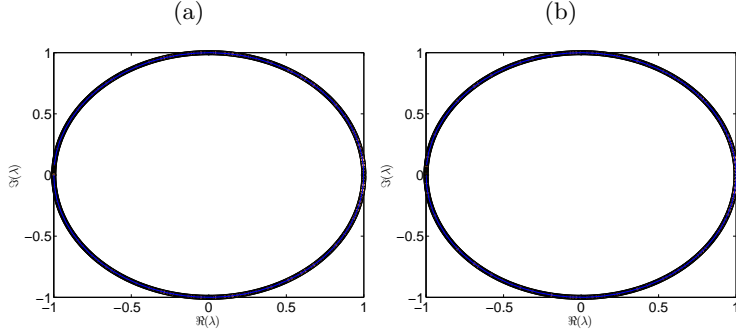


FIG. 3. Valeurs propres de la décomposition en modes dynamiques, distribuées sur le cercle unité, pour les ensembles de mesure (a)  $\{u_x\}$ , (b)  $\{u_z\}$ .

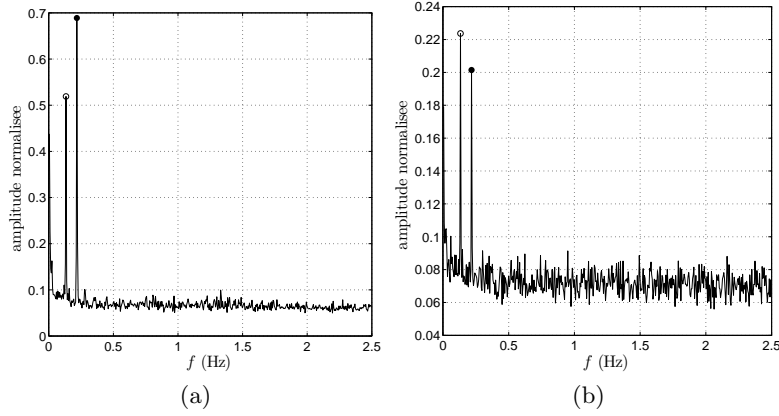


FIG. 4. Spectre d'amplitude normalisé obtenu par décomposition en modes dynamiques. L'amplitude des canaux fréquentiels est donnée par la norme  $\mathcal{L}^2$  des modes dynamiques  $\alpha_k$  pour les ensembles de mesure (a)  $\{u_x\}$ , (b)  $\{u_z\}$ .

Les modes dynamiques principaux,  $\alpha_1$  associé à  $f_1$  et  $\alpha_2$  associé à  $f_2$ , sont représentés sur la Fig. 5. Ils captent la dérive latérale des tourbillons de Taylor-Görtler (à gauche pour  $\alpha_1$ , à droite pour  $\alpha_2$ ). En effet, on peut voir que la partie imaginaire du mode est essentiellement une quadrature de phase de sa partie réelle,  $\alpha_1(\mathbf{r}) \simeq \alpha_{1,r}(x, z) + i\alpha_{1,r}(x, z + \lambda_1/4)$ , de sorte que, multipliée par le coefficient temporel  $\phi_1(t) = e^{2i\pi f_1 t}$ , la dynamique résultante :

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(\mathbf{r}, t) = (\phi_1(t)\alpha_1(\mathbf{r}) + \text{c.c.})/2 = \alpha_{1,r}(x, z) \cos(\omega_1 t) - \alpha_{1,r}(x, z + \lambda_1/4) \sin(\omega_1 t),$$

est une onde progressive gauche. De façon analogue, le mode  $\alpha_2$  capte une dérive à droite. La distribution du champ de vitesse fait clairement apparaître des structures tourbillonnaires sur les parties hautes et basses de l'image (donc près des bords amont et aval), où se trouvent les tourbillons de Taylor-Görtler. L'amplitude du mode  $\alpha_1$  (respectivement  $\alpha_2$ ) va croissante (resp. décroissante) depuis le bord droit jusque vers le bord gauche de la zone d'étude, il y a donc une séparation spatiale des fréquences  $f_1$  et  $f_2$  liées chacune à une dérive gauche ou droite, avec un recouvrement autour de  $z_c$ .

Un autre mode d'amplitude élevée est associé à la fréquence  $f_3 = 0.005$  Hz; il est représenté sur la Fig. 6. Il correspond à un mouvement oscillant suivant  $e_x$ , localisé près des bords amont et aval de la cavité. Ce mode d'oscillation a pu être observé sur des visualisations par fumée de spectacle des tourbillons de Taylor-Görtler; il est si faible dans la configuration présente qu'il n'est pas détectable dans les champs de vitesse autrement que par le filtrage opéré par la décomposition en modes dynamiques.

Le mode associé à la fréquence d'oscillation de la couche cisailée,  $f_4 = 1.33$  Hz, est quant à lui représenté sur la Fig. 7. On constate un mouvement contrarotatif entre le bord amont et le bord aval, caractéristique de la contribution des tourbillons de Taylor-Görtler. On peut remarquer que dans la région  $\mathcal{D}$ , comprise entre  $x/L = 0.25$  et  $0.5$ , et sur toute la longueur suivant  $z$ , le champ de vitesse est quasi-nul sur  $\Re(\alpha_4)$ , non-nul et essentiellement orienté suivant  $e_x$  pour  $\Im(\alpha_4)$ . La dynamique de cette région est donc du type  $\tilde{\mathbf{u}}_4(\mathbf{r}_{\mathcal{D}}, t) = \phi_4(t)\alpha_4(\mathbf{r}_{\mathcal{D}}, t) \simeq u_0 \sin(2\pi f_4 t + \varphi)e_x$ , c'est-à-dire un battement du champ de vitesse dû aux oscillations de la couche cisailée.

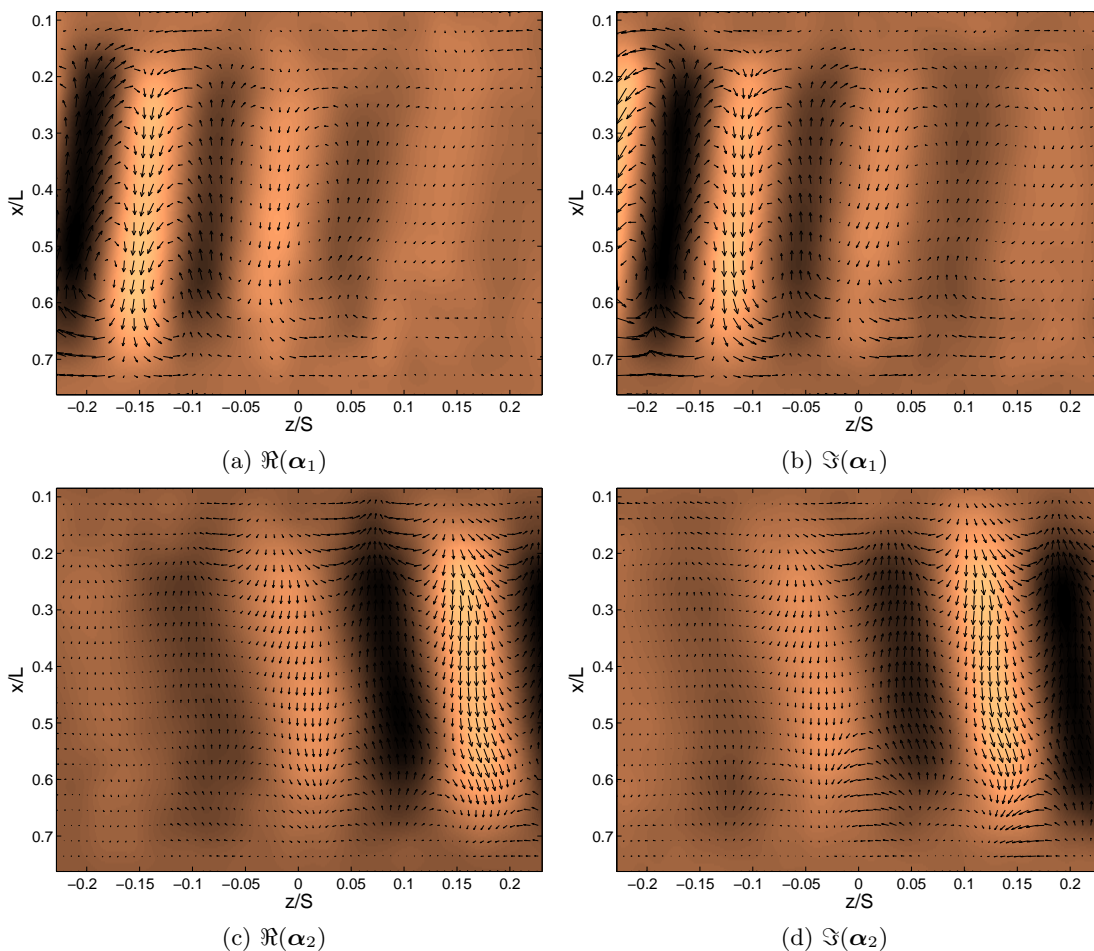


FIG. 5. Parties réelles et imaginaires des modes dynamiques  $\alpha_1$ , associé à  $f_1 = 0.13$  Hz (pic repéré par un cercle ouvert sur la Fig. 3), et  $\alpha_2$ , associé à  $f_2 = 0.22$  Hz (pic associé au cercle plein). Ces modes captent la dérive latérale des tourbillons de Taylor-Görtler, à gauche pour  $\alpha_1$ , à droite pour  $\alpha_2$ . Les vecteurs représentent la partie réelle du champ de vitesse  $(\alpha_z, \alpha_x)$ , l'échelle de couleur encode la partie réelle du champ  $\alpha_k \cdot \mathbf{e}_x$ .

## 4 Conclusion

La décomposition en modes dynamiques, sur les mesures des champs de vitesse fluctuant, a permis d'obtenir les fréquences principales de la dynamique intra-cavitaire et les structures spatiales associées. Ces basses fréquences sont difficiles à mesurer à partir des seuls champs mais bien captées par la décomposition. Nous avons fait la même étude dans des zones différentes du champ (partie gauche, partie droite, totalité du champ avec une décimation de la grille spatiale), les résultats sont les mêmes. Notamment, on constate que la partie latérale droite de la cavité garde une trace de la fréquence de dérive gauche et réciproquement. Ces résultats sont prometteurs car cette technique de décomposition par modes dynamiques permet de filtrer le champ brut et d'en extraire les structures importantes de la dynamique.

## Références

1. T. FAURE, P. ADRIANOS, F. LUSSEYRAN & L. PASTUR, Visualizations of the flow inside an open cavity at medium range Reynolds numbers, *Experiments in Fluids*, **42**, 169-184 (2007).

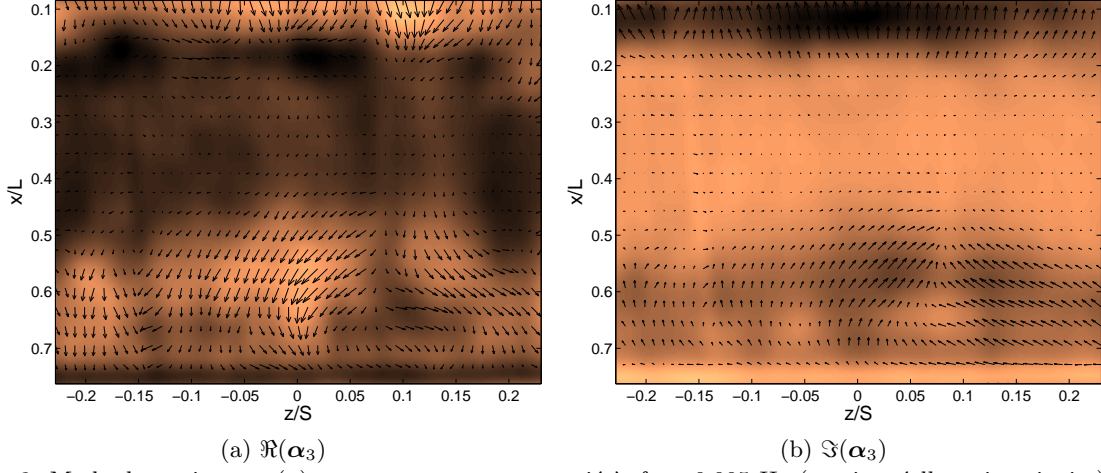


FIG. 6. Mode dynamique  $\alpha_3(\mathbf{r}) = \alpha_{3,z}\mathbf{e}_z + \alpha_{3,x}\mathbf{e}_x$  associé à  $f_3 = 0.005$  Hz (parties réelle et imaginaire). Les vecteurs représentent la partie réelle du champ vectoriel  $\alpha_3$ ; l'échelle de couleur encode la partie réelle de la projection du champ  $\alpha_3$  suivant  $\mathbf{e}_x$ :  $\Re(\alpha_3 \cdot \mathbf{e}_x)$ .

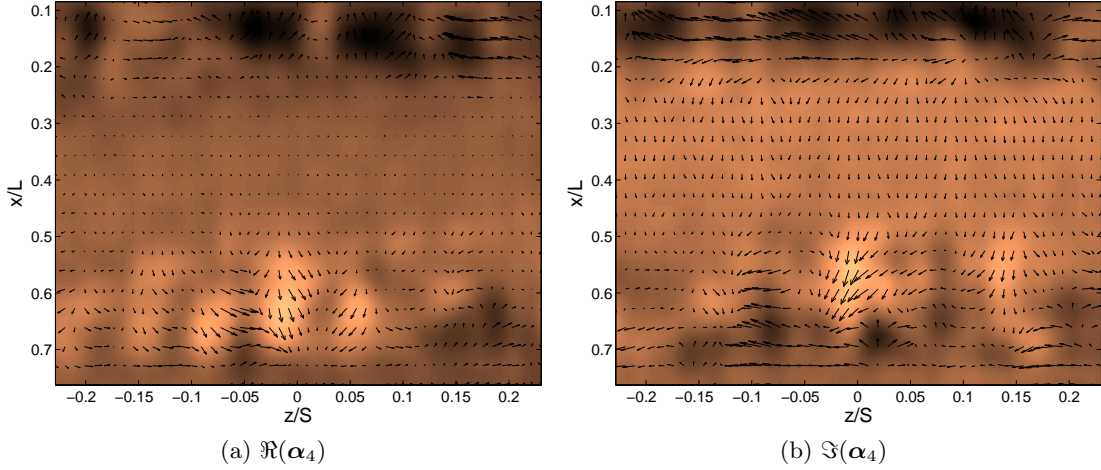


FIG. 7. Mode dynamique  $\alpha_4(\mathbf{r})$  associé à la fréquence  $f_4 = 1.33$  Hz, repliement de la fréquence des oscillations de la couche cisailée. Les vecteurs représentent  $\Re(\alpha_4)$ ; l'échelle de couleur encode  $\Re(\alpha_4 \cdot \mathbf{e}_x)$ .

2. T. FAURE, L. PASTUR, F. LUSSEYRAN, Y. FRAIGNEAU & D. BISCH, Three-dimensional centrifugal instabilities development inside a parallelepipedic open cavity of various shape, *Experiments in Fluids*, **47**, 395-410 (2009).
3. F. GUENIAT, L.R. PASTUR, F. LUSSEYRAN & TH. M. FAURE, Opérateur de Koopman et identification de structures cohérentes : application à un écoulement de cavité, *Comptes-Rendus des Rencontres du Non-Linéaire*, **14**, 87-92 (2011).
4. P. HUERRE & M. ROSSI, Hydrodynamic instabilities in open flows, in *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*, pp. 81-294, Editors C. Godreche, P. Manneville, Cambridge University press (1998).
5. G. QUÉNOT, J. PAKLEZA & T.A. KOWALEWSKI, Particule image velocimetry with optical flow, *Experiments in Fluids*, **25**, 177-189 (1998).
6. C. W. ROWLEY, I. MEZIĆ, S. BAGHERI, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **641**, 115-127 (2009).
7. P. J. SCHMID & J. SESTERHENN, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, in *61st annual meeting of the APS division of fluid dynamics*, APS, San Antonio, Texas, USA (2008)
8. P. J. SCHMID, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of Fluid Mechanics*, **656**, 6-28 (2010).