

# Nouvelles vagues solitaires à la surface de l'eau

Alphonse Leroux<sup>1</sup>, Didier Clamond<sup>2</sup> & Jean Rajchenbach<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique de la Matière Condensée (CNRS-UMR 6622),

<sup>2</sup> Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné (CNRS-UMR 6621)

Université de Nice — Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2

Jean.Rajchenbach@unice.fr

**Résumé.** Grâce à l'excitation paramétrique d'ondes de surfaces dans une cellule de Hele-Shaw, nous mettons en évidence deux nouveaux types de vagues solitaires. Il s'agit de vagues stationnaires très localisées, l'une étant de symétrie paire, l'autre de symétrie impaire. Elles diffèrent du 'clapotis' localisé mis en évidence en canal étroit par Wu *et coll.* [1], ou de l'oscillon qui apparaît lorsque l'excitation paramétrique est composée de deux fréquences [2]. De plus, à notre connaissance, aucune vague solitaire impaire n'avait été mis en évidence jusqu'à ce jour à la surface de l'eau.

**Abstract.** By means of the parametric excitation of water waves in a Hele-Shaw cell, we report the existence of two new types of highly localized, standing surface waves of large amplitude. They are respectively of odd and even symmetries. Both solitary waves oscillate subharmonically with the forcing frequency. They are highly nonlinear, and differ strongly from the other types of localized patterns, previously evidenced by Wu *et al.* [1] and by Arbell *et al.* [2]. Moreover, to our knowledge, such a solitary waves of odd symmetry has never been reported hitherto.

## 1 Introduction

Lorsqu'on vibre verticalement un récipient contenant une couche de liquide, il apparaît à la surface de celui-ci des ondes de surface [3]. Le seuil d'apparition pour ces 'vagues de Faraday' est contrôlé par le fait que l'énergie injectée par le forçage doit être supérieure à la dissipation visqueuse. Cette instabilité a été amplement explorée dans le passé, car elle constitue un moyen privilégié d'étudier l'apparition de structures spatiales résultant du couplage non-linéaire entre vagues de différentes longueurs d'onde [4]. Suivant l'amplitude et la fréquence du forçage, la viscosité du fluide ou la profondeur de la nappe, des motifs très variés ont été identifiés sur la surface libre, tels des bandes, des carrés, des hexagones [5,6,7], ou même des motifs quasi-cristallins (avec la perte de l'invariance par translation) [8,9]. La description théorique standard utilisée pour expliquer l'apparition de ces motifs repose sur l'écriture d'une équation aux amplitudes qui présente les propriétés d'invariance et de symétrie requises [5,10-15]. En particulier, il est admis que le premier terme non-linéaire pertinent est d'ordre cubique, car l'instabilité de Faraday étant de type paramétrique, les vagues de surface oscillent subharmoniquement par rapport à la fréquence de forçage.

Dans cette communication, nous décrivons l'existence de deux nouveaux types de vagues solitaires, que nous avons mises en évidence grâce à un montage de type 'Faraday'. Il s'agit de vagues stationnaires, très localisées, l'une étant de symétrie paire, l'autre impaire. Nous les avons observées en faisant vibrer verticalement une cellule de Hele-Shaw (c'est à dire une cellule quasi-bidimensionnelle), partiellement remplie d'eau. Le profil de la vague paire (bidimensionnelle) offre des ressemblances avec le profil de l'oscillon axisymétrique (tridimensionnelle) mis en évidence par Arbell *et coll.* [2]. Néanmoins, il faut rappeler que tant les solutions de l'équation des vagues que leur stabilité dépendent crucialement de la dimensionnalité de l'espace - il ne s'agit donc pas de la même solution. Rappelons aussi que le forçage de l'oscillon de Arbell *et coll.* [2] est constitué de deux fréquences commensurables  $m\Omega$  et  $n\Omega$ , avec  $m$  et  $n$  premiers entre eux ; dans le cas présent, le forçage est purement sinusoïdal. Concernant la vague impaire, aucune vague solitaire présentant telle symétrie n'avait été observée jusqu'à ce jour, à notre connaissance,

## 2 Montage expérimental

Le système que nous étudions est constitué par une couche de fluide de 5 cm d'épaisseur confinée dans cellule de Hele-Shaw (de 30 cm de longueur). L'intervalle séparant les parois frontales de la cellule est de 1 mm. Le liquide est de l'eau additionnée d'agent mouillant « Photo-Flo », et la température est régulée avec une précision de 0.1° C. Les parois de la cellule ont été traitées à l'acide persulfurique, afin d'augmenter leur mouillabilité. La cellule de Hele-Shaw est ensuite vibrée verticalement. Le mouvement peut être considéré comme sinusoïdal avec une très bonne précision. L'amplitude des vibrations peut atteindre 2 cm, et la zone explorée pour les fréquences de forçage s'étend de 6 à 20 Hz. Les déformations de la surface libre sont filmées à l'aide d'une caméra rapide (250 im/s).

La configuration de Hele Shaw utilisée présente deux avantages. Premièrement, comme nous allons le voir par la suite, elle augmente considérablement le domaine d'existence de ces ondes de surface très localisées. Deuxièmement, elle permet une formulation potentielle du champ de vitesse qui tient compte de la dissipation visqueuse.

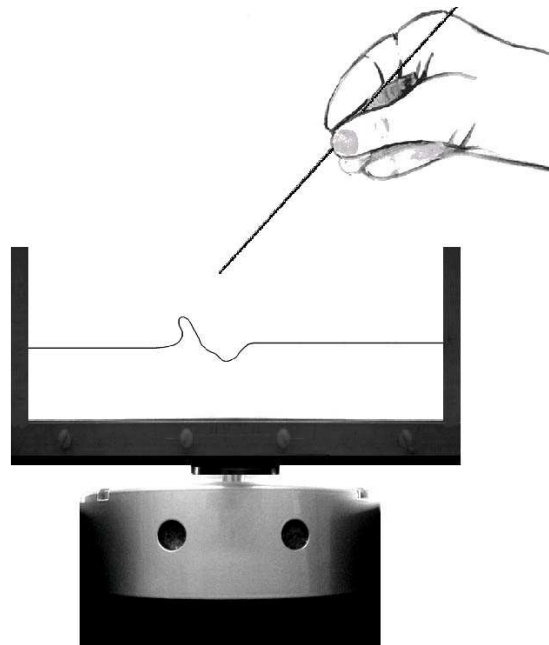


FIG. 1. Schéma du dispositif expérimental. La cellule de Hele-Shaw subit des oscillations verticales. On augmente l'amplitude de ces oscillations depuis le repos jusqu'à atteindre la région de bistabilité. Ensuite, la surface libre verticale est perturbée localement au moyen d'un bâtonnet. Il apparaît alors une onde stationnaire très localisée, qui peut être soit de symétrie paire ou soit de symétrie impaire.

## 3 Observations expérimentales

Tout d'abord, il est important d'insister que dans cette configuration de Hele-Shaw, l'apparition ou la disparition des ondes de surface périodiques dans l'espace témoigne d'une hystérésis notable. Pour fixer les idées, nous allons décrire le protocole expérimental suivant. Nous choisissons une fréquence d'excitation de 10 Hz, par exemple. Ensuite, nous augmentons progressivement l'amplitude de la vibration jusqu'à l'apparition de vagues périodiques dans l'espace. Ces vagues apparaissent avec une amplitude finie, pour une accélération-seuil adimensionnée égale à  $F_{\uparrow}$  ( $F_{\uparrow} = 2.24$  à 10 Hz), où  $F$  est exprimé en unité de  $g$ .

Ensuite, nous diminuons l'amplitude de vibration jusqu'à ce que les vagues périodiques disparaissent. On note alors une autre accélération seuil adimensionnée  $F_{\downarrow}$  ( $F_{\downarrow} = 1.13$  à  $10$  Hz). Une fois ces deux seuils mesurés, nous partons de l'état de surface libre plate ( $F = 0$ ), et nous augmentons l'amplitude du forçage jusqu'à atteindre la région hystérétique ( $F_{\downarrow} < F < F_{\uparrow}$ ). Etant donné ce mode de préparation, la surface libre reste plate. C'est alors que nous perturbons localement la surface libre avec un bâtonnet, que nous ôtons rapidement. Nous observons alors un mode de vibration de la surface libre très localisé, qui oscille subharmoniquement (à  $5$  Hz) et qui peut être de symétrie soit paire, soit impaire (Fig. 2). La symétrie de cette vague solitaire ne peut pas être contrôlée, et il ne peut être exclu que le motif pair résulte de l'accrochage de deux ondes solitaires impaires.

Sur la figure 3 sont reportées les évolutions temporelles des ondes solitaires paires et impaires. Dans les deux cas on note une tendance au déferlement, probablement inhibée par des effets de tension superficielle.

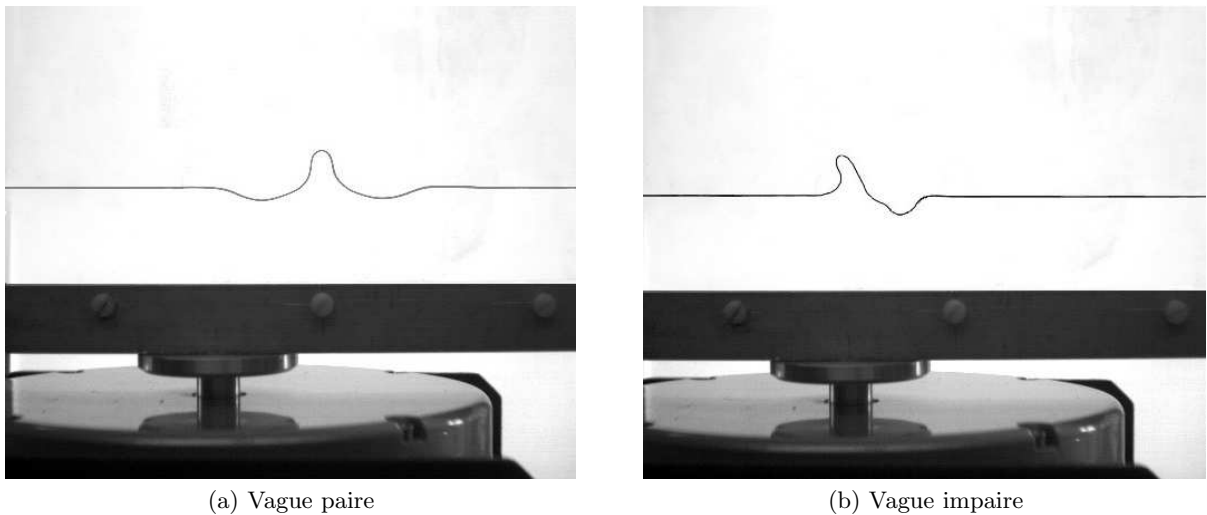


FIG. 2. Photographies des deux vagues solitaires stationnaires.

#### 4 équations modèles

Plusieurs types d'équations aux amplitudes, telle que l'équation de Schrödinger Non-Linéaire supplémentée d'un terme de forçage et d'un terme de dissipation [16,17] ou l'équation de Swift–Hohenberg à coefficients complexes [18,19] ont été proposés pour décrire des ondes stationnaires localisées. De ces modélisations théoriques il ressort que l'ingrédient indispensable pour obtenir une telle localisation est l'existence d'une hystérésis. A ce propos il nous apparaît important de souligner que les équations aux amplitudes sont bien adaptées pour décrire des ondes sinusoidales de faibles amplitudes, celles-ci variant lentement dans l'espace. Elles sont donc pertinentes pour décrire des solitons- enveloppes. Par contre, dans le cas présent, l'extension spatiale totale des 'breathers' observés se limite à quelques tailles d'arche. Il ne s'agit donc pas de solitons-enveloppes, et l'équation de Schrödinger Non-Linéaire apparaît ici inadaptée. Néanmoins, l'écriture d'une équation aux amplitudes présente ici l'intérêt de prédire les paramètres de l'hystérésis observée pour l'apparition ou la disparition des ondes de surface stationnaires et spatialement périodiques.

En géométrie de Hele-Shaw, il est pratique d'introduire la vitesse  $\bar{u}$  des particules de fluide moyennée dans l'épaisseur qui sépare les parois frontales (d'une manière générale, nous noterons avec une sur-barre les paramètres moyennés sur cette intervalle). Rappelons que cette distance  $\ell$  est très petite comparée à

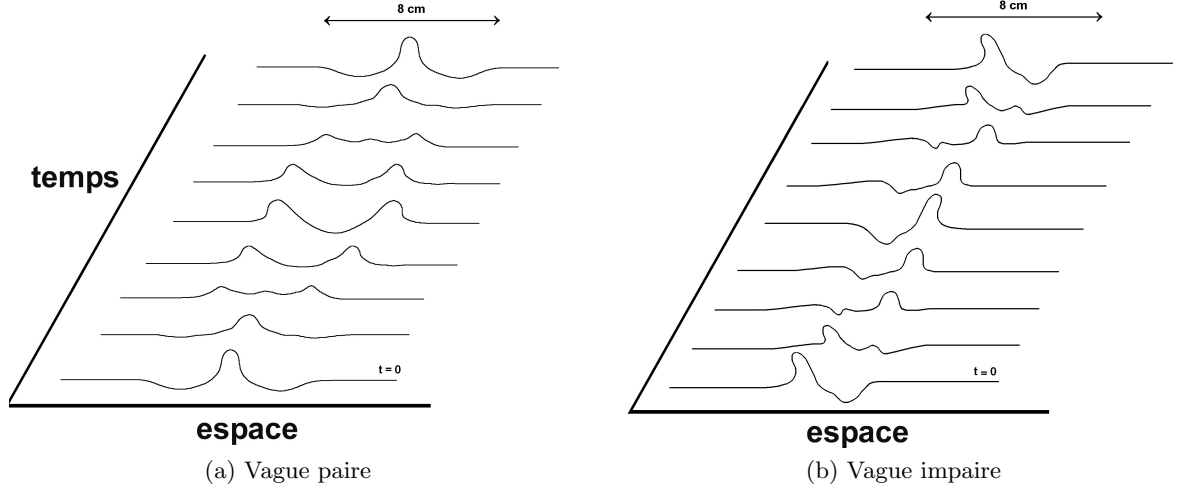


FIG. 3. Evolution temporelle des profils des vagues solitaires stationnaires durant une période complète de leurs oscillations.

la profondeur  $h$  de la couche de fluide, à la longueur d'onde typique des vagues spatialement étendues, et à la longueur totale de la cellule. La moyenne  $\bar{\mathbf{u}}$  est calculée en supposant que le profil de vitesse est parabolique dans l'intervalle  $\ell$  (profil de Poiseuille). On en déduit aisément l'équation de Navier-Stokes écrite à deux dimensions pour le champ de vitesse moyennée  $\bar{\mathbf{u}}$

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \frac{6}{5}(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\rho^{-1} \nabla \bar{P} - \tilde{\mathbf{g}} - \gamma \bar{\mathbf{u}}, \quad (1)$$

où  $\gamma = 12\nu/\ell^2$  est la « viscosité externe de Rayleigh », et  $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}[1 - F \cos(\Omega t)]$  est l'accélération de la pesanteur ressentie par le liquide dans le référentiel lié à la cuve

Dans l'équation (1), le terme habituel de diffusion visqueuse  $\nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}$  apparaît négligeable comparé à  $\gamma \bar{\mathbf{u}}$ . En effet, l'essentiel de la dissipation visqueuse se produit dans la direction normale aux parois, et pour les longueurs d'onde étudiées, le temps d'atténuation  $\gamma^{-1}$  est environ 120 fois plus faible que le temps de diffusion visqueuse  $(\nu k^2)^{-1}$  associé au terme  $\nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}$ . On peut aussi remarquer que pour cette gamme de fréquence où apparaissent ces 'breathers', le temps d'atténuation  $\gamma^{-1} \simeq 0.08$  s imposé par la géométrie de Hele-Shaw se compare à la fréquence de forçage paramétrique  $\Omega/2\pi$  (typiquement 0.1 s). Ceci signifie que toute vorticité initiale aura disparu au bout d'un temps  $\gamma^{-1}$ . On peut donc légitimement supposer l'écoulement irrotationnel en régime permanent, et considérer que le champ de vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$  dérive d'un potentiel  $\phi$  dans l'approximation d'incompressibilité. On peut alors intégrer l'équation (1) et la récrire sous la forme d'une équation de Bernouilli dynamique :

$$\phi_t + \frac{3}{5}(\nabla \phi)^2 + \gamma \phi + \tilde{g} \eta = 0 \quad \text{pour } y = \eta, \quad (2)$$

Les autres équations qui ferment le problème consistent en l'équation de Laplace pour le potentiel des vitesses, et les conditions aux limites à la surface libre du liquide et au fond de la cellule

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad \text{pour } -h \leq y \leq \eta, \quad (3)$$

$$\phi_y = 0 \quad \text{pour } y = -h, \quad (4)$$

$$\eta_t + \eta_x \phi_x - \phi_y = 0 \quad \text{pour } y = \eta, \quad (5)$$

dans lesquelles  $x$  et  $y$  sont respectivement les variables d'espaces horizontale et verticale,  $t$  est le temps, et où  $y = \eta(x, t)$ ,  $y = 0$  et  $y = -h$  sont les ordonnées de la surface libre, de la surface libre au repos, et du fond (supposé plat). Nous ajoutons de plus la condition de pression nulle au niveau de la surface libre. Les effets capillaires sont négligés dans l'équation (2), car la longueur capillaire de l'eau ( $\ell_c = 2.7$

mm) est ici négligeable par rapport aux longueurs d'onde des vagues excitées.

Tout d'abord, nous traitons le système d'équations (2-5) dans le cadre d'une approximation linéaire. Nous trouvons que la transformée de Fourier  $\zeta(k, t)$  de la surface libre obéit à une équation de Mathieu amortie

$$\zeta_{tt} + \left[ \omega_0^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 - \omega_0^2 F \cos(\Omega t) \right] \zeta = 0, \quad (6)$$

où  $\omega_0^2 = gk \tanh(kh)$ . Il est bien connu qu'une telle équation présente des résonances aux voisinages de  $n\Omega = 2\omega_0$ ,  $n$  étant un entier [20]. L'équation de Mathieu a été primitivement établie par Benjamin et Ursell [21] dans le cas inviscide ( $\gamma = 0$ ). Ultérieurement, le terme de dissipation a été rajouté de manière euristique. Dans le cas présent, le terme de dissipation est directement dérivé des équations exactes, ce qui permet la configuration de Hele-Shaw.

Il convient ensuite d'étudier les effets non-linéaires. Afin d'alléger les calculs, nous nous plaçons dans la limite de profondeur  $h$  infinie, et nous considérons un seul nombre d'onde  $k$  pour l'onde stationnaire de surface. Nous résolvons l'ensemble d'équations (2-5) via une méthode perturbative utilisant un développement multi-échelle [22]. Après quelques calculs, on obtient une équation approchée pour la surface libre écrite sous la forme  $\eta(x, t) = \text{Re}\{A(t) e^{i\frac{\Omega}{2}t - i\frac{x}{4}}\} \cos(kx) + O(A^2)$ , où l'amplitude  $A(t)$  satisfait l'équation

$$A_t = (-\alpha_1 + i\alpha_2) A + \alpha_3 A^* - i\alpha_4 |A|^2 A, \quad (7)$$

et où l'astérisque dénote le complexe conjugué et où les  $\alpha_n$  sont réels. On trouve  $\alpha_1 = \gamma/2$ ,  $\alpha_2 = \omega_0 - \Omega/2$ ,  $\alpha_3 = \omega_0 F/4$  and  $\alpha_4 = \omega_0 k^2/10$  avec  $\omega_0^2 = gk$ . Dans l'équation (7), le coefficient  $\alpha_1$  est relié à la dissipation visqueuse, le coefficient  $\alpha_2$  correspond au décalage entre la fréquence naturelle du  $k$  dans la limite des amplitudes infinitésimales et la demi-fréquence du forçage, le terme en  $A^*$  est lié à l'amplitude du forçage paramétrique, et le dernier terme correspond au phénomène non linéaire de décalage en fréquence du mode  $k$  avec l'amplitude de ce mode. L'analyse de stabilité linéaire et non-linéaire d'une équation de cette forme a été développée dans le passé par Meron [23]. Pour  $\Omega > 2\omega_0$ , l'instabilité conduisant à la formation d'une onde de surface est de type 'Hopf supercritique', tandis qu'elle devient sous-critique lorsque  $\Omega < 2\omega_0$ . Le résultat remarquable est qu'il existe un domaine de bistabilité défini pour le domaine  $\Omega < 2\omega_0$ ,  $2\gamma/\omega_0 < F < (4/\omega_0) \{[\omega_0 - (\Omega/2)]^2 + (\gamma^2/4)\}^{1/2}$  pour lequel les deux solutions (celle à surface plate ou bien celle correspondant à une vague de surface d'amplitude non-nulle vibrant avec la fréquence  $\Omega/4\pi$ ) sont simultanément stables. Comme il a été suggéré dans le passé [24-26], on peut interpréter ces ondes localisées dans l'espace comme résultant de la coexistence spatiale de ces deux solutions. Par conséquent, le phénomène d'hystérésis (qui est relié à la dissipation) apparaît ici comme une condition nécessaire pour la localisation de ces vagues dissipatives et forcées. Des mécanismes très analogues ont été mis en évidence dans de nombreux autres domaines, tels l'optique non-linéaire [27], la chimie [28] ou la biologie [29].

**Remerciements.** Nous remercions A. Pumir pour de chaleureuses discussions.

Cette recherche a été financée partiellement par le CNRS et la région PACA

## Références

1. J. WU, R. KEOLIAN & I. RUDNICK, Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton, *Physical Review Letters*, **52**, 1421-1424 (1984).
2. H. ARBELL & J. FINEBERG, Temporally harmonic oscillons in newtonian fluids, *Physical Review Letters*, **85**, 756-759 (2000).

3. M. FARADAY, On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **121**, 299-340 (1831).
4. J. MILES & D. HENDERSON, Parametrically forced surface waves, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **22**, 143-165 (1990).
5. M. C. CROSS & P. C. HOHENBERG, Pattern formation outside of equilibrium, *Reviews of Modern Physics*, **65**, 851-1112 (1993).
6. A. KUDROLLI & J. P. GOLLUB, Patterns and spatiotemporal chaos in parametrically forced surface waves : a systematic survey at large aspect ratio, *Physica D*, **97**, 133-154 (1996).
7. S. DOUADY & S. FAUVE, Pattern selection in Faraday instability, *Europhysics Letters*, **6**, 221-226 (1988).
8. B. CHRISTIANSEN, P. ALSTRØM & M. T. LEVINSEN, Ordered capillary-wave states : Quasicrystals, hexagons, and radial waves, *Physical Review Letters*, **68**, 2157-2160 (1992).
9. W. S. EDWARDS & S. FAUVE, Parametrically excited quasicrystalline surface waves *Physical Review E*, **47**, R788-R791 (1993).
10. J. MILES, Parametrically excited solitary waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **148**, 451-460 (1984).
11. F. SIMONELLI & J. P. GOLLUB, Surface wave mode interactions : effects of symmetry and degeneracy, *Journal of Fluid Mechanics*, **199**, 471-494 (1989).
12. S. T. MILNER, Square patterns and secondary instabilities in driven capillary waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **225**, 81-100 (1991).
13. K. KUMAR & L. S. TUCKERMAN, Parametric instability of the interface between two fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, **279**, 49-68 (1994).
14. S. FAUVE, Parametric Instabilities, in *Dynamics of Nonlinear and Disordered Systems*, G. Martinez-Meckler & T.H. Seligman, Eds., World Scientific, Singapore (1995).
15. P. CHEN & J. VINĀLS, Amplitude equation and pattern selection in Faraday waves, *Physical Review E*, **60**, 559-570 (1999).
16. M. UMEKI, Parametric dissipative nonlinear Schrödinger equation, *Journal of the Physical Society of Japan*, **60**, 146-167 (1991).
17. I. V. BARASHENKOV, E.V. ZEMLYANAYA & M. BAER, Traveling solitons in the parametrically driven nonlinear Schrödinger equation, *Physical Review E*, **64**, 016603 (2001).
18. H. SAKAGUCHI & H. R. BRAND, Stable localized squares in pattern-forming nonequilibrium systems, *Europhysics Letters*, **38**, 341 (1997) — Localized patterns for the quintic complex Swift-Hohenberg equation, *Physica D*, **117**, 95-105 (1998).
19. C. CRAWFORD & H. RIECKE, Oscillon-type structures and their interaction in a Swift-Hohenberg model, *Physica D*, **129**, 83-92 (1999).
20. M. ABRAMOWITZ & I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (1970).
21. T. B. BENJAMIN & F. URSELL, The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **225**, 505-515 (1954).
22. A. H. NAYFEH, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons, New York (1981).
23. E. MERON, Parametric excitation of multimode dissipative systems, *Physical Review A*, **35**, 4892-4895 (1987).
24. Y. POMEAU, Front motion, metastability and subcritical bifurcations in hydrodynamics, *Physica D*, **23**, 3-11 (1986).
25. S. FAUVE & O. THUAL, Ordered capillary-wave states : Quasicrystals, hexagons, and radial waves, *Physical Review Letters*, **64**, 282-284 (1990).
26. C. ELPHICK & E. MERON, Comment on "Solitary waves generated by subcritical instabilities in dissipative systems", *Physical Review Letters*, **65**, 2476 (1990).
27. M. BRAMBILLA, L. A. LUGIATO & M. STEFANI, Formation and control of localized structures in nonlinear optical systems, *Chaos*, **6**, 368-372 (1996).
28. K. J. LEE, W.D. MCCORMICK, Q. OUYANG & H. SWINNEY, Pattern formation by interacting chemical fronts, *Science*, **261**, 192-194 (1993).
29. N. AKHMEDIEV & A. ANKIEWICZ, *Dissipative Solitons*, Springer, Berlin, Heidelberg (2005).