

# Identification des paramètres du modèle de Lorenz en contexte perturbé, par une approche de stratégie d'évolution

Sylvain Mangiarotti<sup>1</sup> & Marc Schoenauer<sup>2</sup>

<sup>1</sup> CESBIO UMR 5126, Observatoire Midi-Pyrénées, 18 Av. Edouard Belin, 31401 Toulouse, France

<sup>2</sup> INRIA Saclay Ile-de-France, LRI, Université PARIS Sud, 91405 Orsay cedex, France

[sylvain.mangiarotti@cesbio.cnes.fr](mailto:sylvain.mangiarotti@cesbio.cnes.fr)

**Résumé.** Un algorithme de stratégie d'évolution est testé à l'identification d'un modèle chaotique de petite dimension. Le modèle de Lorenz est pris comme banc d'essai. La structure du modèle est supposée connue et la variable  $x$  est prise comme seule source d'information du système. Différentes stratégies d'identification sont considérées, basées sur une optimisation directe ou adaptative et en appliquant (ou non) un ajustement de trajectoire par assimilation de données. Les approches sont comparées en termes de robustesse au bruit. Les résultats sont analysés en fonction du type de perturbation appliqué (bruits additifs, multiplicatifs ou combinés) et de la taille des séries utilisées en entrée.

**Abstract.** An Evolution Strategy algorithm is tested for the identification of a chaotic system of low dimension. The Lorenz model is selected as bench mark. The structure of the model is assumed to be known and the  $x$  variable is taken as single source of information. Several approaches are considered based on direct or adaptative optimization, and applying (or not) simple data assimilation scheme. The comparison of the approaches is based on their robustness to noise. Results are analysed depending on the type of perturbation applied (additive and/or multiplicative noises) and on the size of the time series used as input.

## 1 Introduction

Les premiers travaux d'identification des systèmes chaotiques par approche par synchronisation sont issus des travaux de Pecora & Carroll [1]. Ces travaux ont ouvert la voie à de nombreux développements ainsi qu'à des applications pratiques, telle la transmission sécurisée de données. A ce jour, les algorithmes de stratégie d'évolution n'ont encore été que peu appliqués à la synchronisation de systèmes chaotiques. Ces algorithmes constituent pourtant des outils d'optimisation puissants dont la capacité reconnue à d'autres contextes mérite d'être confrontée à un tel contexte.

La difficulté spécifique à l'identification du paramétrage en contexte chaotique provient des non linéarités du système et à la sensibilité aux conditions initiales qui en découle. Cette difficulté est accrue lorsque le système subi des perturbations stochastiques, qui tendent à modifier perpétuellement la trajectoire (qui divergent de façon exponentielle), et à en effacer par la même les conditions initiales.

La boucle de rétroaction utilisée dans les approches par synchronisation permet d'ajuster les paramètres du modèle en cours d'identification en se basant sur la minimisation de la distance entre sortie du modèle maître et simulation du modèle esclave. Dans le présent contexte, le modèle maître est représenté par une seule série temporelle, et le bouclage revient à une application itérative de l'algorithme d'évolution qui vise à identifier un paramétrage optimal du modèle en minimisant la distance entre simulation et série temporelle originale. Si l'approche proposée ici ne permet pas d'assurer une identification en temps réel, elle permet en revanche de multiplier les comparaisons en générant itérativement non pas une simulation mais un ensemble de simulations, qui vont pouvoir être optimisées par itération.

Le modèle de Lorenz a été choisi pour effectuer cette étude. On suppose la structure des équations connue, et seuls le paramétrage du modèle et ses conditions initiales sont à identifier.

## 2 Modèle

Le modèle de Lorenz est utilisé avec des perturbations appliquées à chacune de ses trois variables. Il peut être formulé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_d = \sigma (y_d - x_d) + \varepsilon_x \\ \dot{y}_d = (r - z_d) x_d - y_d + \varepsilon_y \\ \dot{z}_d = x_d y_d - \beta z_d + \varepsilon_z \end{cases} \quad (1)$$

où  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $\beta$  sont les paramètres du modèle et où  $\varepsilon_x(t)$ ,  $\varepsilon_y(t)$  et  $\varepsilon_z(t)$  constituent un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle. L'intégration est assurée par une méthode de type Runge-Kutta avec un pas de temps  $\Delta t = 0.01$ . Les perturbations sont appliquées après chaque pas d'intégration, à chacune des trois variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ , en ajoutant un nombre aléatoire générée à l'aide d'un bruit Gaussien de distribution  $N(0, \alpha_d^2 \mu_2)$  avec  $\mu_2$  la variance de  $x$ ,  $y$  and  $z$  respectivement et  $\alpha_d$  un coefficient multiplicatif variant de 0 à 1. Les paramètres du modèle original ont été fixés tels que  $(\sigma, \rho, \beta) = (10., 28., 8/3)$ , et les conditions initiales prises telles que :  $(x_0, y_0, z_0) = (-4.62, -6.61, 17.94)$ , correspondant à un régime permanent.

L'influence du bruit additif a également été considérée en ajoutant a posteriori un bruit Gaussien à la série  $x$  issue de 1, comme suit :

$$x_s(t) = x(t) + \eta_x(t) \quad (2)$$

où  $\eta_x$  sont des nombres aléatoires suivant une distribution  $N(0, \alpha_s^2 \mu_2)$  avec  $\mu_2$ , la variance de  $x$  et  $\alpha_s$  un coefficient multiplicatif allant de 0 to 1. En pratique, la série d'observation  $^{obs}x$  est une série synthétique utilisée pour identifier les paramètres du modèle original qui est obtenue de l'équation 2, après sous-échantillonnage. Le pas de temps du signal sous-échantillonné est pris tel que  $\Delta T = 0.05$  u.t..

## 3 Approches d'identification

Les approches d'identification utilisées dans ce travail prennent toutes appui sur un algorithme de stratégie d'évolution de type *Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy* (CMA-ES). Les algorithmes de stratégie d'évolution sont des algorithmes d'optimisation qui appartiennent à la famille des algorithmes métaheuristiques inspirés de la théorie de l'évolution [2,3]. Ils se distinguent des algorithmes génétiques par une optimisation simultanée des paramètres de l'algorithme afin de diriger à la fois la sélection et l'évolution des règles d'exploration de la fonction objectif.

L'algorithme CMA-ES utilisé ici [4] est reconnu comme l'un des plus performants algorithmes d'optimisation globale, comme en témoignent les résultats de la compétition à IEEE-CEC 2005 (par comparaison avec d'autres algorithmes d'optimisation stochastique) et des deux récents ateliers à ACM-GECCO 2009 et 2010 (par comparaison avec l'ensemble des méthodes d'optimisation globale voir [5]). Par ailleurs, CMA-ES, comme tous les algorithmes évolutionnaires qui n'utilisent que des comparaisons de valeurs de la fonction objectif (et non pas les valeurs elles-mêmes) est par nature particulièrement robuste au bruit, et a été encore récemment amélioré dans ce domaine [6,7]. Enfin, des améliorations substantielles des performances de l'algorithme dans le cadre parallèle ont été obtenues en modifiant le paramétrage par défaut dans le cas de grandes populations [8], le rendant également incontournable dans le cas d'optimisation de systèmes couteux en temps de calcul. L'algorithme CMA-ES est ainsi de plus en plus utilisé dans des applications scientifiques et industrielles. Un exemple de contrôle d'un système industriel complexe est donné dans [9].

L'une des stratégies efficaces utilisée pour identifier les systèmes chaotiques consiste à commencer l'identification en partant d'une série temporelle de taille réduite et à étendre progressivement sa taille en ajustant progressivement l'estimation des paramètres. Dans le présent travail, cet élément d'exploration de la fonction objectif est testé dans un mode adaptatif où la taille de la série temporelle est ajustée selon l'horizon de prévisibilité du modèle (Fig. 1).

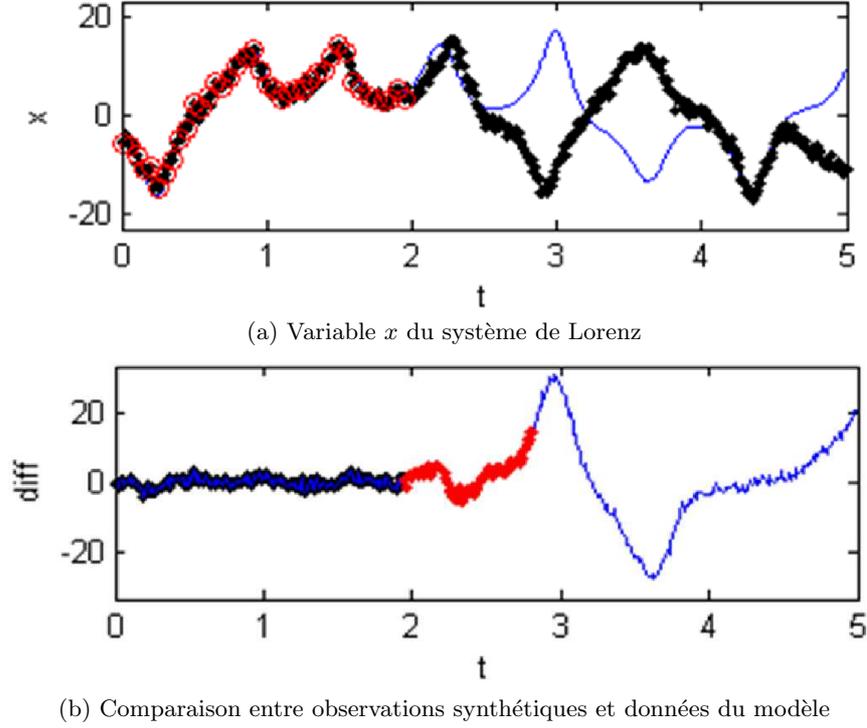


FIG. 1. Variable  $x$  du système de Lorenz (a) : la série d'observation synthétique (losanges noirs) obtenue par intégration du modèle de Lorenz perturbé avec un bruit multiplicatif de 0,25%, et dégradée. L'échantillon utilisé pour l'identification  $y$  est superposé (cercles gris ou rouges). La trajectoire simulée à partir du dernier modèle identifié est également tracé (ligne fine). L'approche basée sur l'assimilation de données sans application de l'identification est utilisée. La différence entre observations synthétiques et simulation par le modèle identifié sont également présentés (b) : sur la période au cours de laquelle est effectuée l'identification (losanges noirs), et sur la période complète (ligne bleue). La période pour laquelle la prévision peut être considérée comme satisfaisante (erreur inférieure à 50%) est représentée par des losanges gris ou rouges.

La fonction objectif est définie à partir de la distance quadratique entre simulation  $\hat{x}$  et la série d'observation  $^{obs}x$  (série issue de l'intégration du système original perturbé) :

$$J_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_i - ^{obs}x_i)^2 \quad (3)$$

L'algorithme d'optimisation est utilisé pour minimiser cette fonction, conduisant à une valeur  $J_x^*$  minimale, à laquelle correspondent une estimation 'optimale' des paramètres du modèle et des conditions initiales associées.

Un second élément visant à améliorer la capacité d'identification du modèle original est testé en adjoignant à l'algorithme d'optimisation un schéma d'assimilation de données simplifié. L'assimilation de données consiste à injecter de l'information dans un modèle au cours de son intégration afin d'ajuster sa trajectoire. De part sa capacité à compenser la perte d'information, ce type d'approche a montré une grande efficacité pour l'amélioration de la connaissance et de la prévision des systèmes de grande dimension. Un certain nombre d'études a permis d'en montrer le potentiel en contexte de plus petite dimension, mais chaotique [10]. Pour le présent contexte, l'assimilation de données est envisagée via un schéma volontairement simpliste, afin de ne pas croiser l'apport de l'assimilation de donnée avec l'apport de l'algorithme d'optimisation. Deux schémas sont considérés, consistants en une mise à jour

directe de l'état du système sur la base de la série temporelle d'observation. Le premier schéma (DA-1) fait l'hypothèse d'une observation idéale par rapport à la prévision du modèle; le second schéma (DA-2) donne le même poids aux observations et aux prévisions. Le cas sans assimilation (noDA) revient à donner tout le poids au modèle.

Cinq approches différentes d'identification sont mises en place. Pour chacune de ces approches, une série courte (de  $N = 40$  valeurs) et une série longue (de  $N = 150$  valeurs) ont été utilisées pour étudier leur sensibilité aux bruits additif et multiplicatif lors de leur mise en oeuvre. Une gamme de perturbation allant jusqu'à 25% a été appliquée pour les tests. Une illustration de simulation est fournie en Fig. 2.

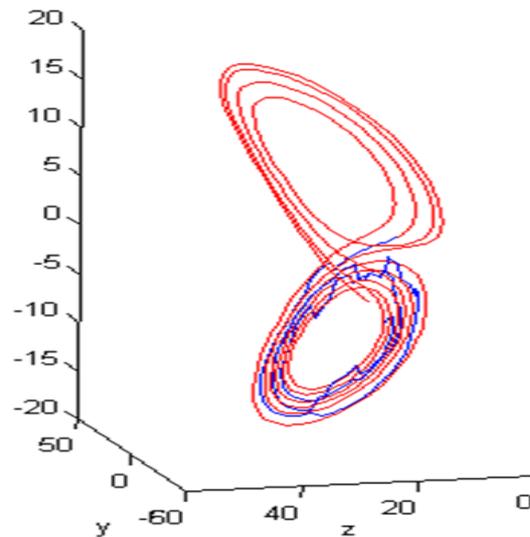


FIG. 2. Portraits de phase de la série d'observation synthétique originale (ligne foncée) et la simulation-prévision tirée du modèle identifié (ligne grise). La série de 40 données qui est utilisée comme source d'information pour cet exemple permet de décrire une des deux boucles de l'attracteur de Lorenz. La série est dégradée par un bruit additif de 4%.

## 4 Résultats et discussion

Le comparatif entre les différentes approches est présenté ici en terme de robustesse, définie à partir du niveau de bruit maximum supporté pour l'identification des paramètres. Deux tailles de série temporelle sont considérées, en condition de perturbation additive, multiplicative ou combinées. L'approche directe montre une très grande robustesse pour les séries de petite taille, et pour les deux types de perturbation, supportant jusqu'à 25% de bruit additif et 0.25% de bruit multiplicatif, que ceux-ci soient ou ne soient pas combinés. L'efficacité de cette approche s'effondre toutefois en partant de la série longue en raison de la dimension et de la complexité accrues de l'espace des paramètres à explorer, justifiant le développement d'approches complémentaires, telle que l'exploration adaptative.

L'approche adaptative montre une meilleure robustesse face à un jeu de données de plus grande taille mais reste médiocre, dégradant en particulier les résultats issus du petit jeu de données. L'approche n'en est pas moins intéressante mais sous optimale, appelant à des adaptations à effectuer en synergie avec les paramètres d'optimisation du code.

Les approches combinant assimilation de données et identification adaptative dégradent elles-aussi la qualité des estimations obtenues à partir du petit jeu de données, mais montrent en revanche une robustesse persistante quand on augmente la taille de la série temporelle. Les scores atteignent 0.25% pour

le bruit additif et 0.04% pour le bruit multiplicatif. Les différences résultant des schémas d'assimilation n'apparaissent pas significativement.

Pour finir, l'approche basée sur l'assimilation de données sans application de l'identification adaptative, montrent des résultats beaucoup plus convaincants, quelle que soit la combinaison de bruit appliquée, atteignant une robustesse pouvant aller jusqu'à 25% de bruit additif, et 0.25% de bruit multiplicatif.

## 5 Conclusions

Les capacités de l'algorithme CMA-ES sont testées pour l'identification d'un système chaotique de petite dimension. L'algorithme est appliqué soit de manière directe, soit combiné à une approche adaptative en adaptant la taille de la série d'entrée en fonction des capacités prédictives du modèle, soit combiné à des schémas d'assimilation de données visant à réintroduire l'information dans le modèle cours de son intégration. Les schémas d'assimilation de données sont volontairement choisis extrêmement simples. Cinq approches sont utilisées et comparées en termes de robustesse au bruit en partant d'une série de petite taille (40 données) ou de taille plus grande (150 données).

La taille de la série temporelle utilisée en entrée montre une influence importante sur la robustesse pour plusieurs des approches. Les approches les plus robustes permettent de supporter jusqu'à 25% de bruit additif et 0.25% de bruit dynamique. En contexte de série temporelle courte ( $N = 40$  données), les meilleurs résultats sont obtenus par une application directe de l'algorithme d'optimisation. Pour des séries plus longues ( $N = 150$ ), il est nécessaire de combiner à l'algorithme d'autres approches. L'approche adaptative basée sur l'exploration progressive de la série fonctionne mais semble nécessiter l'adaptation de la taille de la série d'entrée en synergie avec l'ajustement des paramètres de l'algorithme d'optimisation. L'utilisation de schémas d'assimilation de données montre en revanche une très bonne robustesse partant de séries temporelles de grande tailles ( $N = 150$ ), avec des résultats similaires aux meilleurs résultats obtenus avec une séries courte.

## Remerciements

L'algorithme CMA-ES utilisé ici est issu du code de Nikolaus Hansen (équipe TAO de l'INRIA-Saclay), dans une version légèrement adaptée, <http://www.lri.fr/hansen/>. Cette étude a été financée par l'Institut de Recherche pour le Développement (IRD).

## Références

1. L. M. PECORA & T. L. CARROL, Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters*, **64** (8), 821-824 (1990).
2. I. RECHENBERG, *Evolution strategie : Optimierung technischer systeme nach prinzipien des biologischen evolution*, Stuttgart : Fromman-Hozlboog Verlag (1973).
3. M. SCHOENAUER, *Evolutionary computation and applications at Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris XI (Orsay), pp. 69 (1997).
4. N. HANSEN, S. D. MÜLLER & P. KOUMOUTSAKOS, Reducing the time complexity of the derandomized evolution strategy with covariance matrix adaptation (CMA-ES), *Evolutionary Computation*, **11** (1), 1-18 (2003).
5. N. HANSEN, A. AUGER, R. ROS, S. FINCK & P. POSIK, Comparing results of 31 algorithms from the black-box optimization benchmarking BBOB-2009, In *Proceedings of the 12th annual conference companion on Genetic and evolutionary computation* (GECCO'10), Association for Computing Machinery, pp. 1689-1696 (2010).
6. M. JEBALIA, A. AUGER & N. HANSEN, Log-linear convergence and divergence of the scale-invariant (1+1)-ES in noisy environments, In : *Algorithmica*, Springer (2010).
7. D. BROCKHOFF, A. AUGER, N. HANSEN, D. V. ARNOLD & T. HOHM, Mirrored sampling and sequential selection for evolution strategies, *Lecture Notes in Computer Science*, **6238**, 11-21 (2011).
8. M. JEBALIA & A. AUGER, Log-linear convergence of the scale-invariant ES and optimal for intermediate recombination for large population sizes, *Lecture Notes in Computer Science*, **6238**, 52-61 (2011).
9. N. HANSEN, A. NIEDERBERGER, L. GUZZELLA & K. PETROS, A method for handling uncertainty in evolutionary optimization with an application to feedback control of combustion, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, **13** (1), 180-197 (2009).
10. R. N. MILLER, E. F. CARTER JR. & S. T. BLUE, Data assimilation into nonlinear stochastic models, *Tellus A*, **51**, 167-194 (1999).