

Etude d'un canal stratifié différentiellement chauffé

Bérandère Podvin¹ & Patrick Le Quéré²

LIMSI-CNRS, Université Paris-Sud, Orsay
podvin@limsi.fr

Résumé. Nous considérons l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical différentiellement chauffé et stratifié en deux dimensions. Nous avons dérivé une équation de Ginzburg-Landau à partir des équations du mouvement et comparé les prédictions du modèle avec les observations de la simulation numérique directe. Nous montrons que le modèle de Ginzburg-Landau permet de représenter correctement la dynamique de l'écoulement au-dessus de la bifurcation à des nombres de Rayleigh modérés. Suffisamment au-delà de la bifurcation, on observe un comportement fortement non-linéaire de l'écoulement avec des ondes cnoidales.

Abstract. We consider the flow in a differentially heated, stratified, two-dimensional channel. A Ginzburg-Landau equation was derived from the equations of motion and its predictions were compared with the direct numerical simulation. We find that the Ginzburg-Landau provides an adequate representation of the flow dynamics in a range of moderate Rayleigh numbers. At higher Rayleigh numbers, the flow becomes strongly nonlinear and cnoidal waves appear in the boundary layers.

1 Introduction

Depuis les travaux de Newell et Whitehead [1] et Stuart et Di Prima [2] pour la convection de Rayleigh-Bénard, le formalisme de Ginzburg-Landau a été souvent utilisé pour décrire une grande variété de phénomènes nonlinéaires dans les milieux continus avec une symétrie de translation, et peut être considéré comme une forme normale généralisée pour la bifurcation des instabilités primaires [3]. Nous nous intéressons ici à la convection naturelle, dans une situation où, à la différence de Rayleigh-Bénard, la poussée d'Archimède agit orthogonalement au gradient de température imposé. Nous étudions les instabilités dans un canal différentiellement chauffé et stratifié à faible nombre de Prandtl, dans le cadre d'une simulation numérique bi-dimensionnelle. Au delà du seuil d'instabilité linéaire, nous identifions d'abord un régime chaotique, puis au-delà d'un second seuil, un régime plus organisé, caractérisé par la présence de structures de type solitons (ondes cnoidales).

2 Le problème

2.1 Le domaine

Le domaine physique est représenté en figure 1. On considère un canal vertical de largeur 1 et hauteur H . Le nombre de Prandtl est égal à 0.71. Les parois sont maintenues à des températures différentes. L'écart de température entre les deux parois à hauteur constante est pris égal à 1. Les températures à la paroi varient de plus linéairement en fonction de la hauteur, ce qui induit une stratification positive. Ceci nous conduit à introduire un paramètre de stratification relative

$$\gamma = \frac{1}{4}(RaS)^{1/4}$$

où Ra est le nombre de Rayleigh $Ra = \frac{\tilde{\alpha}g\Delta TD^3}{\nu\kappa}$ ($\tilde{\alpha}$ est le coefficient d'expansion thermique, g la gravité, ν la viscosité et κ la conductivité thermique), et S est le gradient de température adimensionné. Le paramètre γ est supposé être constant et égal à 8.

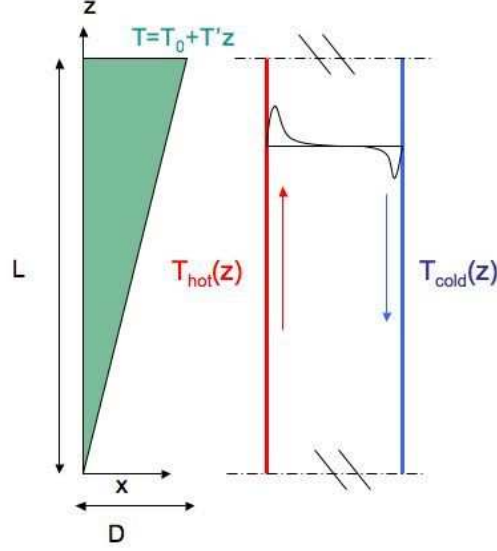


FIG. 1. Configuration.

2.2 Equations du mouvement

On note (u, w) les composantes de vitesse et θ la différence de température. En raison de la stratification la température T peut être décomposée en une partie linéaire et une partie périodique en z

$$T(x, z) = Sz + \theta(x, z)$$

Par la suite nous ne considérerons que la partie fluctuante.

Dans l'approximation de Boussinesq, les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + g\tilde{\alpha}(\theta - T(x, z)) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} + wS = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

avec les conditions aux limites $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 0$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, $w(0) = 0$, $w(1) = 0$

La configuration admet une solution de base analytique pour la vitesse verticale W et la température, dont la forme dépend de γ [4].

$$W(x) = \frac{1}{4i} \frac{\kappa}{D} \left(\frac{Ra}{S} \right)^{1/2} \left(\frac{sh[(1+i)\gamma(x-\frac{1}{2})]}{sh[(1+i)\frac{\gamma}{2}]} - \frac{sh[(1-i)\gamma(x-\frac{1}{2})]}{sh[(1-i)\frac{\gamma}{2}]} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\Theta(x) - T_0 - T'_\infty z}{\Delta T} = -\frac{1}{4} \left(\frac{sh[(1+i)\gamma(x-\frac{1}{2})]}{sh[(1+i)\frac{\gamma}{2}]} + \frac{sh[(1-i)\gamma(x-\frac{1}{2})]}{sh[(1-i)\frac{\gamma}{2}]} \right) \quad (6)$$

Les équations sont résolues avec un code spectral Fourier-Chebyshev. En enlevant la partie stratifiée de l'écoulement, nous considérons des conditions aux limites périodiques.

3 Stabilité linéaire de l'écoulement

Nous avons d'abord reproduit des résultats pour la stabilité linéaire de l'écoulement. Nos résultats s'accordent avec ceux de Bergholz [5], qui a réalisé une étude de stabilité pour une gamme de nombres de Prandtl et de paramètres de stratification. L'écoulement reste stable pour un nombre de Rayleigh inférieur à une valeur critique de $Ra = 1.63 \cdot 10^5$. Le nombre d'onde critique est $k_c = 4.33$ et définit une hauteur critique $H_c = 2\pi/k_c = 1.45$. La déstabilisation correspond à une bifurcation de Hopf. L'examen des vecteurs propres associés aux valeurs propres instables (Fig. 2) révèle que chaque mode est concentré essentiellement dans une moitié de canal pour la valeur de la stratification relative considérée.

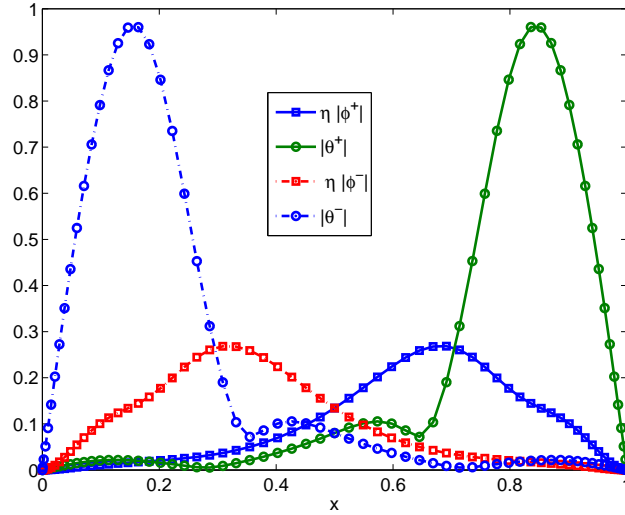


FIG. 2. Amplitude des modes instables (fonction de courant ϕ and température θ).

Du fait de la stratification, les conditions d'application du théorème de Squire ne sont pas remplies et une instabilité tridimensionnelle pourrait précéder l'instabilité bidimensionnelle.

4 Chaos par défaut de phase

Lorsque la hauteur du canal est suffisamment grande, la solution linéaire périodique se déstabilise rapidement. Nous avons dérivé un modèle de Ginzburg-Landau [6] à partir des équations du mouvement. Le modèle est de la forme

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \alpha(1 + ic_0)A + \beta(1 + ic_1)\frac{\partial A}{\partial z^2} - g(1 + ic_2)(|A|^2 A) \quad (7)$$

Les valeurs des coefficients de l'équation sont $\alpha = 0.10 + i0.38$, $\beta = 0.0079 + i0.0068$, $g = 10.11 + i8.60$, $c_1 = -5.4$, $c_2 = 0.85$.

Les valeurs de c_1 et c_2 montrent que le système est instable vis-à-vis des instabilités de Benjamin-Feir, ce qui s'accorde avec l'observation numérique d'un régime quasi-périodique. Comme on peut le voir dans la figure 3, on observe de rapides variations de l'amplitude de la solution, qui sont réminiscentes des trous de Nozaki-Bekki [7] observées dans l'équation de Ginzburg-Landau.

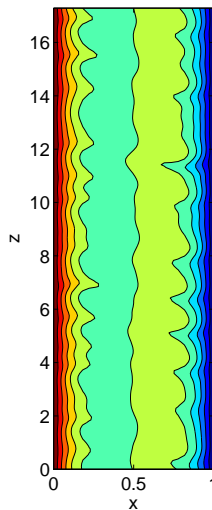


FIG. 3. Température fluctuante pour $Ra = 2.4 \cdot 10^5$ dans un domaine $H = 12H_c$.

5 Solitons

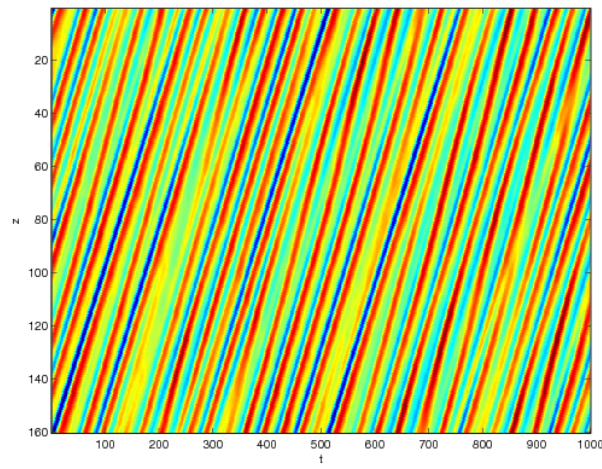
En augmentant le nombre de Rayleigh, on observe un changement de dynamique dans la simulation, où l'on passe d'un état à plusieurs cellules dont l'intensité varie faiblement, à un état où une cellule devient beaucoup plus importante que les autres. On a montré [6] que la forme de cette structure correspondait bien à celle d'un soliton. La comparaison des diagrammes spatio-temporels de la température à une certaine distance de la paroi chaude en figure 4 illustre le changement de dynamique. Toutes les cellules dans le régime chaotique évoluent essentiellement à la même vitesse, alors que les structures isolées dans le nouveau régime ont une vitesse très différente. L'intensité des solitons augmente avec le nombre de Rayleigh.

En augmentant encore le nombre de Rayleigh, on s'aperçoit que la vitesse de ces solitons n'est pas constante (Fig. 4c). On observe des ralentissements, suivis de fortes accélérations. L'examen de la simulation révèle que cette situation correspond au croisement de deux solitons - l'un dans la couche limite thermique chaude, l'autre dans la couche limite thermique froide. Notons que la simulation bi-dimensionnelle ne peut probablement pas décrire correctement l'interaction de ces solitons, de sorte qu'il est tout à fait possible que ces changements de vitesse soient dus à un artefact numérique.

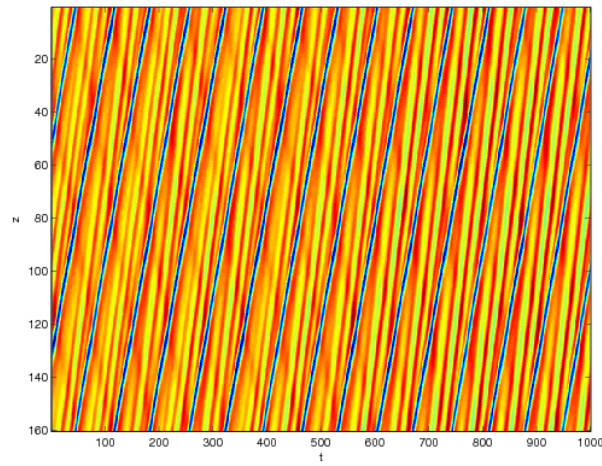
Le nombre de Rayleigh au-dessus duquel les solitons sont observés ne dépend pas de la hauteur du canal et semble être autour de $Ra = 2.7 \cdot 10^5$. En revanche le nombre de structures localisées dépend de la hauteur du canal. Nous avons identifié une hauteur critique $H = 6H_{ref}$ au-dessus de laquelle on passe de une à deux structures (Figs. 5a et 5b). Lorsque on augmente encore la hauteur du canal, l'espacement entre les structures n'est pas forcément constant.

6 Conclusion

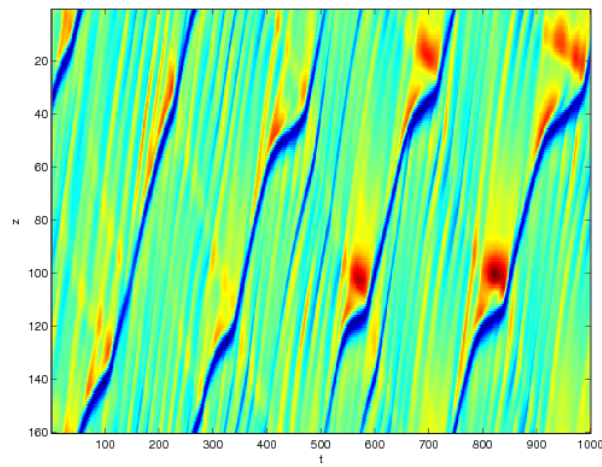
Nous avons étudié la simulation numérique d'un canal différentiellement chauffé et stratifié à faible nombre de Prandtl. Nous identifions d'abord un régime chaotique, puis au-delà d'un second seuil, un régime plus organisé, caractérisé par la présence de structures de type solitons. Nous avons comparé les observations de la simulation numérique avec les prédictions d'un modèle de Ginzburg-Landau et obtenu certains points de convergence. Nous souhaitons à présent mieux comprendre l'origine des solutions cnoidales. Une comparaison avec le cas tridimensionnel est également prévue.



(a) $Ra = 2.5 \cdot 10^5$

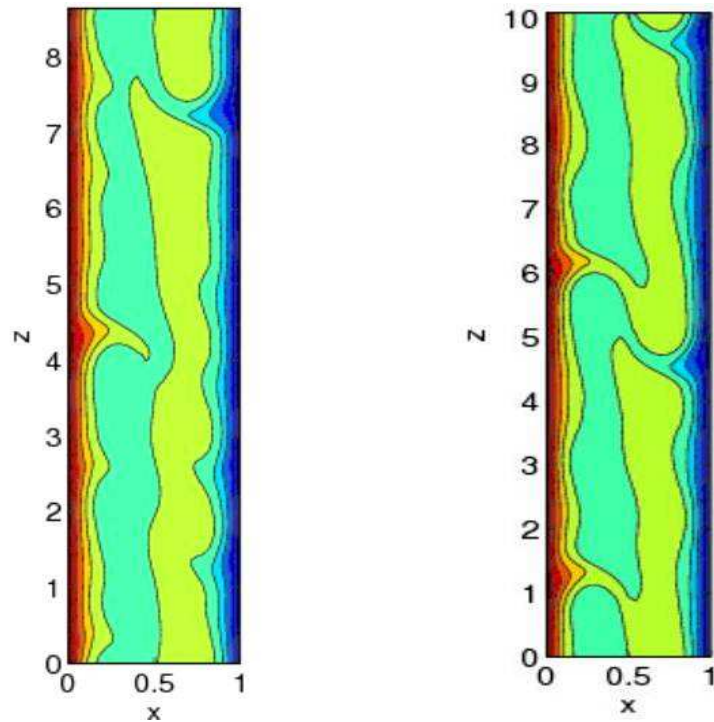


(b) $Ra = 2.7 \cdot 10^5$



(c) $Ra = 3.4 \cdot 10^5$

FIG. 4. Diagrammes spatio-temporel le long d'une ligne verticale $x = 0.98$ dans un canal de hauteur $H = 7H_c$.



(a) Dans un canal de hauteur $H = 6H_c$ (b) Dans un canal de hauteur $H = 7H_c$

FIG. 5. Température instantanée à $Ra = 2.7 \cdot 10^5$.

Références

1. A. NEWELL & J. WHITEHEAD, Finite band width, finite amplitude convection, *Journal of Fluid Mechanics*, **38**, 279–303 (1969).
2. J. T. STUART & R.C. DIPRIMA, The Eckhaus instability and Benjamin-Feir resonance mechanisms, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **362**, 27, 1978.
3. P. MANNEVILLE, *Dissipative structures and weak turbulence*, Academic New York, (1990).
4. S. XIN, *Simulations Numériques de Convection Naturelle Turbulente*. PhD thesis, LIMSI — Université Paris-Sud, 1993.
5. R.F. BERGHOLZ, Instability of steady natural convection in a vertical fluid layer, *Journal of Fluid Mechanics*, **84**, 743–768 (1978).
6. B. PODVIN & P. LE QUÉRÉ, Instabilités dans un canal stratifié différentiellement chauffé, *Technical Report*, LIMSI-CNRS, 2011.
7. N. BEKKI & K. NOZAKI, Formations of spatial patterns and holes in the generalized Ginzburg-Landau equation, *Physics Letters A*, **110** (3), 133–135 (1985).