

Bifurcation de H-planforms dans le plan hyperbolique en relation avec un modèle de perception des textures d'images par le cortex visuel

Pascal Chossat¹ & Grégory Faye²

¹ laboratoire J-A Dieudonné, UMR CNRS 6618, UNSA, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02

² Laboratoire NeuroMathComp, INRIA/ENS Paris/CNRS, 2004 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France

`pascal.chossat@unice.fr`

Je présente de nouveaux résultats obtenus en collaboration avec Grégory Faye et Olivier Faugeras (projet NeuroMathComp, www-sop.inria.fr/neuromathcomp) sur la bifurcation de structures périodiques dans le plan hyperbolique. La relation avec le traitement des images reçues par la rétine dans le cortex visuel provient de deux hypothèses. L'une, expérimentale, est que chaque portion d'image suffisamment petite est traitée par une petite portion du cortex visuel (aire V1) qu'on appelle une hyper-colonne. L'autre hypothèse, "naturelle", est que les textures locales de l'image sont caractérisés de façon satisfaisante par le *tenseur de structure* de l'image que l'on a introduit dans ce contexte dans un article paru dans *PLoS Computational Biology* (2009), voir aussi *Chossat, Faugeras, Compte-Rendus RNL 2010*. Dans cette présentation on se focalisera sur la partie "traitement mathématique" du problème de bifurcation. On rappelle ici les caractéristiques essentielles de la modélisation à l'origine du problème. L'espace \mathcal{V} des tenseurs de structure est un espace riemannien feuilleté par des plans hyperboliques. Le potentiel d'action d'une hyper-colonne satisfait une équation intégro-différentielle qu'il est naturel de supposer invariante (en première approximation) par le groupe G des isométries de cet espace riemannien, dans le cas où cette hyper-colonne est isolée de son environnement et ne reçoit pas d'input de la rétine. Mais même dans ce cas, si le gain de la réponse nonlinéaire à une fluctuation est suffisant, une instabilité peut se développer et donner lieu à un "pattern" du potentiel d'action sur \mathcal{V} . C'est une origine possible des hallucinations. Si de plus on cherche des solutions de cette équation qui sont "spatialement" périodiques, c'est-à-dire invariantes par l'action d'un sous-groupe discret H du groupe des isométries de \mathcal{V} tel que le quotient \mathcal{V}/H soit un espace compact, alors on se ramène à une situation où les méthodes classiques de la théorie des bifurcations (réduction de Lyapounov-Schmidt, variété centrale...) s'appliquent et de plus on peut réduire l'étude à celle d'un problème posé sur le plan hyperbolique. Nous appelons les solutions de ce type qui satisfont au "lemme de bifurcation équivariante" (donc qui ont une propriété d'universalité pour les problèmes de bifurcation posés dans le plan hyperbolique) des *H-planforms*. Le groupe H , contrairement au cas euclidien, est d'ordre fini et dépend de façon cruciale du polygone fondamental qui engendre le pattern périodique. Nous avons déterminé toutes les H-planforms dans le cas où ce polygone est un octogone régulier (le cas le plus simple dans cette classe de problèmes). Nous avons pu calculer numériquement un certain nombre d'entre elles et faire ainsi apparaître leur structure (symétrie résiduelle) interne.