

## Emergence de microstructures dans le cancer de la peau

Thibaut Balois<sup>1</sup>, Clément Chatelain<sup>1</sup>, Pasquale Ciarletta<sup>2</sup> & Martine Ben Amar<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure, Paris, France

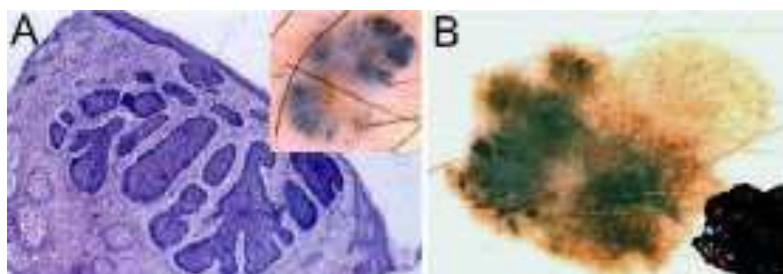
<sup>2</sup> CNRS et Université Pierre et Marie Curie — Paris VI, Institut Jean le Rond d'Alembert, Paris, France  
benamar@lps.ens.fr

**Résumé.** Le diagnostic clinique des cancers de la peau est notamment basé sur la présence de microstructures (i.e. petite pigmentation, nests) répartis de façon éparse sur la lésion tumorale. Dans cette étude, nous démontrons que ces microstructures peuvent provenir d'un procédé de séparation de phase à l'aide d'un modèle à deux phases où nous considérons les cellules cancéreuses d'une part, phase cellulaire, et une phase liquide rassemblant les autres constituants.

**Abstract.** Clinical diagnosis of skin cancers is based on several morphological criteria, among which the presence of microstructures (e.g. dots, nests). In this study, we demonstrate that these patterns might be originated by a phase separation process by using a two-phase model that may undergo a spinodal decomposition. The distribution and the evolution of such emerging cluster morphologies, as predicted by our model, are successfully compared to the clinical observation of microstructural patterns in tumour lesions.

### 1 Introduction

L'évolution d'une tumeur est souvent caractérisé par l'émergence de microstructures inhomogènes de cellules cancéreuses [1]. Cette aspect revêt une importance particulière du diagnostic de certains cancers de la peau [2](Fig. 1). Cependant, la plupart des analyses de ces structures se concentrent sur des études empiriques, mais peu se sont concentrés sur la compréhension de leur origine physique. Des travaux récents ont proposés des mécanismes physiques pour l'apparition des irrégularités de lésion de ces contours [4,5], à travers l'adhésion entre cellules et la diffusion des nutriments.



**Figure 1.** (A) Carcinome basocellulaire présentant des agrégats de cellules (de [www.dermoscopy.org](http://www.dermoscopy.org)). (B) Mélanome présentant des glocules de différentes tailles et formes distribués aléatoirement sur la lésion (adapté de [3]).

Afin d'expliquer la formation d'agrégats de cellules, différentes approches théoriques ont utilisé des modèles discrets [6,8,9] uniquement adaptés aux petites tailles. Des modèles continus ont donc été développés afin de donner un aperçu analytique des phénomènes, notamment les modèles multiphasés largement utilisés [10,11,12]. Ces modèles peuvent modéliser la croissance de tumeurs dans différents media à de grandes échelles. Notre but est donc d'étudier analytiquement et numériquement l'apparition

On effectue le produit scalaire de l'équation de Vlasov avec  ${}^6\psi_q^\epsilon = {}^6\psi_q(t, t^\epsilon)$ , on multiplie par  $\epsilon$  puis on passe à la limite. On obtient alors l'équation de contrainte  $\frac{\partial {}^6F}{\partial s} + \mathcal{L}_{i_{\frac{\partial}{\partial x}}(\mathcal{N} + i_{v_{\frac{\partial}{\partial x}}}\mathcal{M})\frac{\partial}{\partial v}} {}^6F = 0$  dans  $(L^2([0, T) \times S^1, L^2(P, \Lambda^6)))'$ . Cette équation signifie que  ${}^6F$  est constante le long de la caractéristique :

$$\frac{dV}{ds} = i_{\frac{\partial}{\partial x}}\mathcal{N} + i_{\frac{\partial}{\partial x}}i_{v_{\frac{\partial}{\partial x}}}\mathcal{M}. \text{ On va définir alors une transformation : } \varphi(v, s) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \cos(s) - (v_3 + 1) \sin(s) \\ v_2 \sin(s) + (v_3 + 1) \cos(s) - 1 \end{pmatrix}.$$

Alors il existe  ${}^6G \in L^2([0, T), L^2(P, \Lambda^6))$  tel que l'on ait  ${}^6F_q(t, s) = (\varphi^*{}^6G)_q(t, s)$ . De plus, pour une 6-forme test  ${}^6\psi^\epsilon$ , on passe à la limite deux échelles en utilisant la formule (1) page 28 et comme  ${}^1\mathbf{E}^\epsilon$  et  ${}^2\mathbf{B}^\epsilon$  converge fortement, on en déduit  $\langle {}^6F, \frac{\partial {}^6\psi}{\partial t} + \mathcal{L}_\tau {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T) \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6F(0), {}^6\psi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}$ , avec  $\tau = v_{\frac{\partial}{\partial x}} + \left( i_{\frac{\partial}{\partial x}}{}^1\mathbf{E} + i_{\frac{\partial}{\partial x}}i_{v_{\frac{\partial}{\partial x}}}{}^2\mathbf{B} \right) \frac{\partial}{\partial v}$ . Pour obtenir l'équation vérifiée par  ${}^6G$ , on utilise la formule ci-dessus et on injecte les expressions de  ${}^6F$  et de  ${}^6\psi$  qui font apparaître le changement de coordonnées  $\varphi^* \cdot \mathcal{O}\mathbb{P}^q({}^6G)$ ,  $\frac{\partial \varphi^*({}^6\phi)}{\partial t} + \mathcal{L}_\tau \varphi^*({}^6\phi) \rangle_{L^2([0, T) \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle \varphi^*({}^6G(0)), \varphi^*({}^6\phi)(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}$ . Ce qui se simplifie par  $\langle {}^6G, \frac{\partial {}^6\phi}{\partial t} + \mathcal{L}_{(\varphi^*)^{-1}(\tau)} {}^6\phi \rangle_{L^2([0, T) \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6G(0), {}^6\phi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}$ ,

avec  $(\varphi^*)^{-1}(\tau) = \tilde{u}_{\frac{\partial}{\partial x}} + \left( i_{\frac{\partial}{\partial x_1}}{}^1\mathbf{E} - i_{\frac{\partial}{\partial x_1}}i_{\frac{\partial}{\partial x_3}}{}^2\mathbf{B} + i_{\frac{\partial}{\partial x}}i_{\tilde{u}_{\frac{\partial}{\partial x}}}{}^2\mathbf{B}_1 dy \wedge dz \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}$ , où  $\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\tilde{u}_{\frac{\partial}{\partial x}} =$

$u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (u_3 + 1) \frac{\partial}{\partial x_3}$  et  ${}^6G(0) = \frac{1}{2\pi} {}^6f(0)$ . Maintenant, on peut en déduire l'équation satisfait par la limite faible  ${}^6f$  en utilisant la relation entre  ${}^6F$  et  ${}^6f$ . On obtient, pour  $\mathcal{M} = dy \wedge dz$  et  $\mathcal{N} = dy$ , que la limite faible étoile  $f$  de la sous suite satisfaisant l'équation de Vlasov est solution de  $\frac{\partial {}^6f}{\partial t} + \mathcal{L}_{\tilde{\tau}} {}^6f = 0$ , avec  $\tilde{\tau} = \tilde{u}_{\frac{\partial}{\partial x}} + \left( i_{\frac{\partial}{\partial x_1}}{}^1\mathbf{E} - i_{\frac{\partial}{\partial x_1}}i_{\frac{\partial}{\partial x_3}}{}^2\mathbf{B} + i_{\frac{\partial}{\partial x}}i_{\tilde{u}_{\frac{\partial}{\partial x}}}{}^2\mathbf{B}_1 dy \wedge dz \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}$  et  ${}^6f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \varphi^*{}^6f(0)$ .

On remarque que  $-i_{\frac{\partial}{\partial y}}\mathcal{N} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{M} = -dz$  est l'effet drift. On peut retrouver ce terme dans l'approximation centre guide quand on utilise les mêmes hypothèses sur le champ électrique et magnétique.

## Références

1. A. BACK, *Étude théorique et numérique des équations de Vlasov-Maxwell dans le formalisme covariant*, Thèse (2011)
2. H. C. PAK, Geometric two-scale convergence on forms and its applications to Maxwell's equations, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A*, **135**, 133-147 (2005)
3. C. H. SCOTT,  $L^p$  theory of differential forms on manifolds, *Transactions of the American Mathematical Society*, **347** (6), 2075-2096 (1995)
4. E. FRÉNOD & E. SONNENDRÜCKER, The finite Larmor radius approximation, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **32** (6), 1227-1247 (2001)
5. G. ALLAIRE, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **23**, 1482-1518 (1992)
6. G. NGUETSENG, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **23**, 1482-1518 (1989)
7. E. FRÉNOD, P.-A. RAVIART & E. SONNENDRÜCKER, Two-scale expansion of a singularly perturbed convection equation, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **80** (8), 815-843 (2001)
8. G. D. BIRKHOFF, What is the ergodic theorem?, *Amer. Mathematical Monthly*, **49** (4), 222-226 (1942)
9. F. I. MAUTNER, Geodesic flows on symmetric Riemann spaces, *Ann. Math.*, **65** (3), 416-431 (1957)
10. E. HOPF, *Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig (1939).
11. E. FRÉNOD & E. SONNENDRÜCKER, Homogenization of the Vlasov equation and of the Vlasov-Poisson system with a strong external magnetic field, *Asymptotic Analysis*, **18** (3), 293-313 (1998)
12. D. HAN-KWAN, The three-dimensional finite Larmor radius approximation, *Asympt. Anal.*, **66**, 9-33 (2010)
13. J. JOST, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Springer (2008)

On montre que pour  ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$  et  ${}^6G \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$  vérifiant le lemme précédent, l'équation vérifiée par  ${}^6G$  est

$$\frac{\partial {}^6G}{\partial t} + \mathcal{L}_{u_{\parallel} \frac{\partial}{\partial x} + \left( i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E}_{\parallel} + i \frac{\partial}{\partial x} i_u \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B}_{\parallel} \right) \frac{\partial}{\partial u}} {}^6G = 0, \quad (3)$$

avec  ${}^6G(0) = \frac{{}^6f(0)}{\text{vol}(S^1)} = \frac{{}^6f(0)}{2\pi}$  et  $u_{\parallel} = u_1 \mathbf{e}^1$  la projection dans la direction du champ magnétique  $\mathcal{M}$ . La solution de cette équation est unique. On a alors pour  ${}^6\psi \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$  l'existence de  ${}^6\phi \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$  vérifiant  ${}^6\psi_q(t, s) = (\varphi^* {}^6\phi)_q(t, s)$  et tel que l'on a  $\frac{\partial {}^6\psi}{\partial s} + \mathcal{L}_{\left( i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M} \right) \frac{\partial}{\partial v}} {}^6\psi = 0$ .

Pour une 6-forme test  ${}^6\psi^\epsilon$ , en utilisant la formule (1) de la page 28, on passe à la limite deux échelles et comme  ${}^1\mathbf{E}^\epsilon$  et  ${}^2\mathbf{B}^\epsilon$  converge fortement, on en déduit

$$\langle {}^6F, \frac{\partial {}^6\psi}{\partial t} + \mathcal{L}_\tau {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6F(0), {}^6\psi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)},$$

avec  $\tau = v \frac{\partial}{\partial x} + \left( i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E} + i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B} \right) \frac{\partial}{\partial v}$ . On utilise alors le lemme 1 et puisque  $\mathcal{L}_\tau \varphi^*({}^6\phi) = \varphi^*(\mathcal{L}_{(\varphi^*)^{-1}(\tau)} {}^6\phi)$  et que  $\frac{\partial \varphi^*({}^6\phi)}{\partial t} = \varphi^*\left(\frac{\partial {}^6\phi}{\partial t}\right)$ , alors on peut simplifier cette égalité et on a :

$$\langle {}^6G, \frac{\partial {}^6\phi}{\partial t} + \mathcal{L}_{(\varphi^*)^{-1}(\tau)} {}^6\phi \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6G(0), {}^6\phi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)},$$

avec  $(\varphi^*)^{-1}(\tau) = \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} + \left( i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E} + i \frac{\partial}{\partial x} i_{\tilde{u}} \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}$ , où  $\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \cos(s) + u_3 \sin(s) \\ -u_2 \sin(s) + u_3 \cos(s) \end{pmatrix}$  et la dérivée

partielle  $\frac{\partial}{\partial \tilde{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} \\ \cos(s) \frac{\partial}{\partial u_2} + \sin(s) \frac{\partial}{\partial u_3} \\ -\sin(s) \frac{\partial}{\partial u_2} + \cos(s) \frac{\partial}{\partial u_3} \end{pmatrix}$ . De plus, comme  ${}^6G$  et  ${}^6\phi$  ne dépendent pas de  $s$ , on peut

intégrer sur  $S^1$  et on obtient  $\langle {}^6G, \frac{\partial {}^6\phi}{\partial t} + \mathcal{L}_{\tilde{\tau}} {}^6\phi \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} = -\frac{1}{2\pi} \langle {}^6G(0), {}^6\phi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}$ ,

avec  $\tilde{\tau} = u_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \left( (i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E})_1 + i \frac{\partial}{\partial x} i_{\tilde{u}} \frac{\partial}{\partial x} (B_x dy \wedge dz) \right) \frac{\partial}{\partial u}$ . On en conclut, à l'aide de l'unicité de la solution de l'équation (3), que la suite  ${}^6f^\epsilon$  converge à deux échelles vers  ${}^6F$  et comme on a l'égalité  $\int_{S^1} {}^6F_q(t, s) ds = {}^6f_q(t)$ ,  ${}^6F$  converge faiblement à deux échelles vers  ${}^6f$ . On a alors obtenu une formulation faible de (3) et on a démontré le théorème suivant :

**Théorème 5** *On suppose que  $1^\circ$ )  ${}^6f^\epsilon(0)$  est bornée dans  $L^2(P, \Lambda^6)$ ,  $2^\circ$ ) que  ${}^1\mathbf{E}^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^1))$  converge fortement vers  ${}^1\mathbf{E}$  dans  $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^1))$ ,  $3^\circ$ ) et  ${}^2\mathbf{B}^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^2))$  vers  ${}^2\mathbf{B}$  dans  $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^2))$ . Sous ces conditions on peut extraire une sous suite  ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$  de  ${}^6f^\epsilon$  solution de  $\frac{\partial {}^6F}{\partial t} + \mathcal{L}_{u_{\parallel} \frac{\partial}{\partial x} + \left( i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E}_{\parallel} + i \frac{\partial}{\partial x} i_u \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B}_{\parallel} \right) \frac{\partial}{\partial u}} {}^6F = 0$ , avec  ${}^6F(0) = \frac{{}^6f(0)}{\text{vol}(S^1)} = \frac{{}^6f(0)}{2\pi}$ .*

### 3.2 Avec un champ magnétique et électrique fort

On homogénéise l'équation de Vlasov avec un champ magnétique et électrique fort :  $\frac{\partial {}^6f^\epsilon}{\partial t}(t) + \mathcal{L}_{\tau^\epsilon} {}^6f^\epsilon(t) = 0$ , avec  $\tau^\epsilon$  le champ de vecteurs égale à  $v \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial x} \left( {}^1\mathbf{E}^\epsilon + \frac{\mathcal{N}}{\epsilon} + i_v \frac{\partial}{\partial x} \left( {}^2\mathbf{B}^\epsilon + \frac{\mathcal{M}}{\epsilon} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v}$ , où  $\mathcal{M}$  est une 2-forme différentielle constante,  $\mathcal{N}$  une 1-forme différentielle constante et  ${}^6f^\epsilon(t)$  une forme volume sur  $P$ , plus précisément  ${}^6f^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$ . On suppose que l'on a les mêmes conditions initiales qu'à la section précédente. En procédant de la même manière que précédemment, on a l'existence d'une sous suite de  ${}^6f^\epsilon$ , encore notée  ${}^6f^\epsilon$  et d'une 6-forme différentielle  ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$  telle que pour tout  ${}^6\psi \in L^2([0, T] \times S^1, C_c^2(P, \Lambda^6))$ , on ait

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle {}^6f^\epsilon, {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} dt = \langle {}^6F, {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))}.$$

### 3 Homogénéisation de l'équation de Vlasov

#### 3.1 Avec un champ magnétique fort

Pour appliquer la convergence à deux échelles sur l'équation de Vlasov, on s'inspire des articles [7,4]. Soit  $M$  l'espace de dimension 3, on se place dans l'espace des phases découplé du temps :  $P = T^*M = \{(x, v) | x \in M, v \in T_x^*M\}$ . Dans cet espace, l'équation de Vlasov à homogénéiser est  $\frac{\partial {}^6f^\epsilon}{\partial t}(t) + \mathcal{L}_{\tau^\epsilon} {}^6f^\epsilon(t) = 0$ , avec  $\tau^\epsilon$  le champ de vecteurs égale à  $v \frac{\partial}{\partial x} + \left( i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E}^\epsilon + i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} ({}^2\mathbf{B}^\epsilon + \frac{\mathcal{M}}{\epsilon}) \right) \frac{\partial}{\partial v}$ , où  $\mathcal{M}$  est une 2-forme différentielle constante,  ${}^6f^\epsilon(t)$  une forme volume sur  $P$ , plus précisément  ${}^6f^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$  et  $i$  représente le produit intérieur [13]. On suppose que 1)  ${}^6f^\epsilon(0)$  est bornée dans  $L^2(P, \Lambda^6)$ , 2°) que  ${}^1\mathbf{E}^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^1))$  converge fortement vers  ${}^1\mathbf{E}$  dans  $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^1))$ , et 3°)  ${}^2\mathbf{B}^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^2))$  vers  ${}^2\mathbf{B}$  dans  $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^2))$ . Avec ceci, on peut alors montrer que la norme de  ${}^6f^\epsilon$  est conservée au cours du temps, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $c \geq 0$  telle que  $\|{}^6f^\epsilon\|_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} \leq c$ . Pour ce faire, il suffit de multiplier l'équation de Vlasov par  $\star {}^6f^\epsilon$  et de l'intégrer sur l'espace  $P$ . Après calculs, on obtient alors que la dérivée temporelle de la norme de  ${}^6f^\epsilon$  dans  $L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$  est égale à 0. Ce résultat permet d'appliquer le théorème 3 page 27. On a alors l'existence d'une sous suite de  ${}^6f^\epsilon$ , encore notée  ${}^6f^\epsilon$  et d'une 6-forme différentielle  ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$  telle que pour tout  ${}^6\psi \in L^2([0, T] \times S^1, C_c^2(P, \Lambda^6))$ , on ait

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle {}^6f^\epsilon, {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} dt = \langle {}^6F, {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} .$$

Calculons alors le produit scalaire entre l'équation de Vlasov et  ${}^6\psi_q^\epsilon = {}^6\psi_q(t, t^\epsilon)$  sur l'espace  $[0, T] \times P$  ( $t^\epsilon$  est expliqué page 27) et après quelques calculs, on obtient

$$\langle {}^6f^\epsilon, \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial s} + \mathcal{L}_{\tau^\epsilon} {}^6\psi^\epsilon \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6f^\epsilon(0), {}^6\psi^\epsilon(0) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)} . \quad (1)$$

Pour pouvoir passer à la limite, on multiplie cette équation par  $\epsilon$ , ce qui nous donne

$$\langle {}^6F, \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial s} + \mathcal{L} \left( i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M} \right) \frac{\partial}{\partial v} {}^6\psi^\epsilon \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = 0,$$

avec  ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$ . De plus, d'après les articles de N'Guetseng [6] et Allaire [5], on a  $\int_{S^1} {}^6F_q(t, s) ds = {}^6f_q(t)$ , autrement dit, on a

$$\frac{\partial {}^6F}{\partial s} + \mathcal{L} \left( i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M} \right) \frac{\partial}{\partial v} {}^6F = 0 \quad \text{dans} \quad \left( L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6)) \right)' . \quad (2)$$

Ceci signifie que  ${}^6F$  est constante le long des caractéristiques. Les caractéristiques ont un mouvement hélicoïdale autour du vecteur magnétique  $\mathcal{M}$ . On va définir alors une transformation  $\varphi$  qui laisse invariant la projection de la vitesse  $v$  sur  $\mathcal{M}$  et effectue une rotation d'angle  $s$  pour la projection sur le plan orthogonal à  $\mathcal{M}$  :  $\varphi(v, s) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \cos(s) - v_3 \sin(s) \\ v_2 \sin(s) + v_3 \cos(s) \end{pmatrix}$ . On peut voir alors qu'en prenant en compte la condition de périodicité, Frénod et Sonnendrücker [11] ont montré le lemme suivant

**Lemme 1.** *On a  ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$  qui satisfait  $\frac{\partial {}^6F}{\partial s} + \mathcal{L} \left( i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M} \right) \frac{\partial}{\partial v} {}^6F = 0$  dans  $\left( L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6)) \right)'$ , si et seulement si il existe  ${}^6G \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$  tel que  ${}^6F_q(t, s) = (\varphi^\star {}^6G)_q(t, s)$ .*

**Définition 1** Soit  $(\alpha^\epsilon)_{\epsilon>0}$  une suite de  $k$ -formes différentielles dans  $L^r(M, \Lambda^k)$ , on dit qu'elle converge vers la limite à deux échelles  $\alpha^0 \in L^r(M, \Lambda^k L^r(Y))$  si pour toute  $k$ -forme différentielle  $\psi \in C_0^2(M, \Lambda^k \Omega^0(Y))$ , on a

$$\langle \alpha^\epsilon, \psi_{(p,p^\epsilon)} \rangle_{L^r(M, \Lambda^k)} \longrightarrow \langle \alpha^0, \psi \rangle_{L^r(M, \Lambda^k L^r(Y))},$$

où  $\alpha^0$  est appelé limite deux échelles  $\alpha^\epsilon$  in  $L^r(M, \Lambda^k L^r(Y))$ . On dira que  $\alpha^\epsilon$  converge fortement à deux échelles vers  $\alpha^0$  si  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\alpha^\epsilon - \alpha_{(p,p^\epsilon)}^0\|_{L^r(M, \Lambda^k)} = 0$ .

On peut alors avoir la proposition suivante [1,2] :

**Proposition 1** On suppose que  $M$  et  $Y$  sont des variétés riemanniennes de dimension  $n$ , que  $M$  est complet avec bords et que  $Y$  est compacte et vérifie la condition de Mautner ou de Hopf. Soit  $\psi \in L^2(M, \Lambda^k C^2(Y))$ , on a  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\psi_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \Lambda^k)} = \|\psi\|_{L^2(M, \Lambda^k L^2(Y))}$ .

Grâce à cette proposition, Pak formula le théorème de la convergence à deux échelles avec un paramètre.

**Théorème 2** On suppose que  $M$  et  $Y$  sont des variétés riemanniennes de dimension  $n$ , que  $M$  est complet avec bords et que  $Y$  est compacte et vérifie la condition de Mautner ou de Hopf. Soit  $(\alpha^\epsilon)$  une suite bornée dans  $L^2([0, +\infty), L^2(M, \Lambda^6))$ , il existe une sous suite  $(\alpha^{\epsilon_j})$  de  $(\alpha^\epsilon)$  et une forme  $\alpha^0 \in L^2([0, +\infty), L^2(M, \Lambda^6 L^2(Y)))$  tel que pour tout  $\psi \in L^2([0, +\infty), C_c^2(M, \Lambda^6 \Omega^6(Y)))$ ,

$$\lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_0^\infty \langle \alpha^{\epsilon_j}(t), \psi_{(p,p^{\epsilon_j})}(t) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6)} dt = \int_0^\infty \langle \alpha^0(t), \psi(t) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6 L^2(Y))} dt.$$

Dans la suite, on ne pourra pas appliquer directement ce théorème car on veut effectuer la convergence à deux échelles en temps (et non en espace) comme l'ont fait Frénod et Sonnendrücker pour les équations de Vlasov-Poisson [7,4]. Pour ce faire, on adapte ce théorème à notre problème. Par hypothèse, la variété  $Y$  doit être une variété symétrique compacte de même dimension que la variété temporelle i.e. de dimension 1. Autrement dit,  $Y$  correspond au cercle  $S^1$  (à difféomorphisme près). On obtient alors le théorème suivant :

**Théorème 3** Soit  $(\alpha^\epsilon)$  une suite bornée dans  $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^6))$ , où  $T$  peut être égale à  $+\infty$ . Il existe une sous suite  $(\alpha^{\epsilon_j})$  de  $(\alpha^\epsilon)$  et  $\alpha^0 \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(M, \Lambda^6))$ , telle que, pour toute forme différentielle  $\psi \in L^2([0, T] \times S^1, C_c^2(M, \Lambda^6))$  on ait

$$\lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_0^T \langle \alpha^{\epsilon_j}(t), \psi(t, t^\epsilon) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6)} dt = \int_0^T \int_{S^1} \langle \alpha^0(t, s), \psi(t, s) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6)} ds dt,$$

avec  $t^\epsilon = \exp_t(\frac{1}{\epsilon} j(v))$  pour  $v \in T_t[0, T]$ , et  $j$  un isomorphisme tel qu'il existe  $q_0$  tel que  $T_t[0, T] \stackrel{j}{\cong} T_{q_0} Y$ .

On peut remarquer, qu'on aurait pu énoncer ces théorèmes en utilisant les espaces  $L^\infty([0, T], L^2(M, \Lambda^6))$  et  $L^1([0, T], L^2(M, \Lambda^6))$ .

De la même manière que pour la convergence à deux échelles au sens classique, on a une proposition qui nous renseigne sur la convergence géométrique à deux échelles de la dérivée d'une suite qui peut être également adaptée pour la convergence à deux échelles en temps.

**Proposition 4** On suppose que les suites  $\alpha^\epsilon \in L^2(M, \Lambda^k)$  et  $d\alpha^\epsilon \in L^2(M, \Lambda^{k+1})$  sont bornées. Alors, il existe une sous suite  $\alpha^{\epsilon_j}$  de  $\alpha^\epsilon$  telle que  $\alpha^{\epsilon_j}$  converge à deux échelles vers  $\alpha^0$  dans  $L^2(M, \Lambda^k L^2(Y))$  et  $d\alpha^{\epsilon_j}$  converge à deux échelles vers  $d\alpha^0 + d_Y \alpha^1$  dans  $L^2(M, \Lambda^{k+1} L^2(Y))$  pour  $\alpha^0$  dans  $L^2(M, \Lambda^k H^{1,d}(Y))$  et  $\alpha^1 \in L^2(M, \Lambda^{k+1} H^{1,d}(Y))$ . De plus,  $\alpha^0 \in \ker(d_Y)$ .

## 2 La convergence géométrique à deux échelles

Les formes différentielles ne sont pas obligatoirement des objets réguliers. On va donc tout d'abord rappeler quelques notions utiles à l'analyse fonctionnelle et les adapter pour les formes différentielles. Ceci nous permettra de définir une analyse fonctionnelle utilisant des éléments géométriques tels que les formes différentielles. Cette théorie est la  $L^r$ -cohomologie. On note une  $k$ -forme différentielle sur  $M$ ,  $\omega^k : M \rightarrow \bigwedge^k(T^*M)$  et l'ensemble des  $k$ -formes différentielles sur  $M$ ,  $\Omega^k(M)$ . Au dessus d'une carte locale de  $M$  on a  $(x_1, \dots, x_n)$  le système de coordonnées local de  $p$  un point de  $M$ , toute  $k$ -forme différentielle sur  $M$  peut s'écrire  $\omega_p^k = \sum_{i_1, \dots, i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k}^k(x) dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}$ . On notera également par  $L^r(M, \bigwedge^k)$  l'espace des  $k$ -formes différentielles  $r$ -intégrables. Il est défini par :  $L^r(M, \bigwedge^k) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \text{ mesurable tel que } \|\alpha\|_{L^r(M, \bigwedge^k)} < +\infty\}$ , pour  $1 \leq r \leq +\infty$ , avec  $\|\alpha\|_{L^r(M, \bigwedge^k)} := \left(\int_M |\alpha|_p^r \text{vol}_p\right)^{\frac{1}{r}}$ , pour  $1 \leq r < \infty$  et  $\|\alpha\|_{L^{+\infty}(M, \bigwedge^k)} := \sup_{p \in M} \text{ess}|\alpha|_p$ , où  $|\alpha|_p^r = (\star(\alpha_p^k \wedge \star\alpha_p^k))^{\frac{r}{2}} = \left(\sum_{i_1, \dots, i_k} (\alpha_{i_1, \dots, i_k}(x))^2\right)^{\frac{r}{2}}$ . On associe un produit scalaire à la norme  $\|\alpha\|_{L^2(M, \bigwedge^k)}$  de la façon suivante  $\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2(M, \bigwedge^k)} := \int_M \alpha \wedge \star\beta$ , avec  $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$  mesurables. On a  $\|\cdot\|$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  qui sont bien définis car ils ne dépendent pas des cartes sur  $M$ .

Soient maintenant  $M$  et  $Y$  des variétés riemanniennes de dimension  $n$ , on définit des formes différentielles qui sont des  $k$ -formes sur  $M$  et  $l$ -formes sur  $Y$  :

$$\begin{aligned} \omega^{k,l} : M \times Y &\longrightarrow \bigwedge^k(T^*M) \times \bigwedge^l(T^*Y) \\ (p, q) &\longmapsto (p, q, \omega_{(p,q)}^{k,l}) \end{aligned}$$

$L^r(M, \bigwedge^k L^s(Y, \bigwedge^l))$  représente l'ensemble des  $k$ -formes différentielles  $L^r$  sur  $M$  et  $l$ -formes différentielles  $L^s$  sur  $Y$  avec  $r \in [1, \infty]$ . Par exemple une forme différentielle :  $\alpha^{k,l} \in L^r(M, \bigwedge^k L^s(Y, \bigwedge^l))$  a pour valeur  $\alpha_{(p,q)}^{k,l} = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} \alpha_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}(x, y) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_l}$ , en tout  $p \in M$  et  $q \in Y$  avec  $x$  et  $y$  respectivement coordonnées locales de  $q$  et  $p$ . Soient  $p_0 \in M$ ,  $q_0 \in Y$  et un isomorphisme  $j$  tel que  $T_{p_0}M \stackrel{j}{\cong} T_{q_0}Y$ . Le théorème de Hopf-Rinow nous dit que pour tout point  $q \in Y$ , il existe  $v_{p_0} \in V_0 \subset T_{p_0}M$  (où  $V_0$  est le plus grand ouvert contenant 0 dans  $T_{p_0}M$ ) tel que, pour  $\epsilon$  petit,  $q$  s'écrit  $q = \exp_{p_0}(\frac{1}{\epsilon} j(v_{p_0}))$ , où  $\exp_{p_0}$  représente l'application exponentielle de  $V_0$  dans  $M$  [13]. Dans la suite, on notera  $p^\epsilon = \exp_{p_0}(\frac{1}{\epsilon} j(v))$  avec  $v \in T_{p_0}M$ .

La convergence géométrique à deux échelles résulte de l'application du théorème de Birkhoff (1931), du théorème de Hopf (1939) et du théorème de Mautner (1957). Le théorème de Birkhoff [8] dit que pour  $(\Omega, \mu)$  un espace probabilisé et  $\varphi^t$  un flot ergodique on a alors, pour  $f \in L^r(\Omega, \mu)$ ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi^t) dt \xrightarrow{+\infty} \int_M f(x) d\mu.$$

Pour faire de la convergence géométrique à deux échelles, on observe alors qu'on a besoin que le flot géodésique soit ergodique sur  $Y$ . Les théorèmes de Hopf [10] et de Mautner [9] nous donnent des conditions sur  $M$  pour que l'on ait l'ergodicité du flot. Le théorème de Hopf [10] stipule que dans une variété riemannienne compacte de volume fini à courbure négative, les flots géodésiques sont ergodiques. Et Mautner a montré que dans une variété riemannienne symétrique, les flots géodésiques sont également ergodiques. Voici quelques exemples de variétés riemanniennes symétriques : les tores, les espaces projectifs, les espaces hyperboliques, les espaces d'Heisenberg,  $Sl(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$ , l'espace symétrique quaternion-Kähler (qui est compacte si la courbure de Ricci est positive).

De plus, si les variétés vérifient ces conditions, alors elles sont géodésiquement complètes, et donc on a encore le fait que tout point  $q$  appartenant à ces variétés peut s'écrire sous la forme  $q = p^\epsilon = \exp_{p_0}(\frac{1}{\epsilon} j(v_{p_0}))$ . Afin d'avoir les conditions optimales pour pouvoir utiliser le théorème de Birkhoff, dans la suite on suppose que  $M$  et  $Y$  sont des variétés riemanniennes de dimension  $n$ , que  $M$  est complet avec bords et que  $Y$  est compacte et vérifie la condition de Mautner ou de Hopf. On va maintenant pouvoir expliquer la convergence géométrique à deux échelles dans le formalisme covariant en commençant par la définition suivante :