

Événements extrêmes dans la dispersion relative turbulente

Jérémie Bec, Rehab Bitane & Holger Homann

Laboratoire J.-L. Lagrange UMR 7293, Université de Nice-Sophia Antipolis, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, 06304 Nice Cedex 4, France.

jeremie.bec@oca.eu

Résumé. Nous étudions par le biais de simulations numériques directes les propriétés statistiques de la dispersion relative de traceurs dans un écoulement en turbulence homogène isotrope développée. Les valeurs typiques de la distance entre traceurs semblent bien décrite par l'approche de Richardson. En revanche, les valeurs extrêmes en dévient fortement et suggèrent que le mélange turbulent n'est pas aussi efficace que prédit. Nous montrons que cela peut s'interpréter par un comportement diffusif des différences de vitesse entre traceurs qui fait intervenir un taux local de transfert d'énergie défini comme le rapport entre le cube des différences de vitesse et la distance. Cette quantité atteint un régime statistiquement stationnaire sur des petites échelles de temps.

Abstract. The statistics of Lagrangian pair dispersion in a developed homogeneous isotropic turbulent flow is investigated by means of direct numerical simulations. The typical values of the distance between tracers seem well described by Richardson's approach. However, the extrem values strongly deviate from it and this suggests that turbulent mixing is much less efficient than expected. We show that this can be understood in terms of a diffusive behavior of velocity differences between tracers, which depends on a local energy transfer rate defined by the ratio between the cube of the longitudinal velocity difference and the distance. This quantity attains a statistically stationary regime on short timescales.

1 Introduction

Le comportement diffusif aux temps longs des traceurs d'un écoulement turbulent est souvent utilisé dans la modélisation du transport. Les propriétés de mélange sont alors décrites en termes d'une diffusivité turbulente effective qui est exprimée en fonction des caractéristiques dynamiques de l'écoulement. Cette démarche est par exemple utilisée pour le contrôle de la qualité de l'air afin d'évaluer les risques sur la santé d'une longue exposition en aval d'une source de polluants. Toutefois, ce type d'approche échoue lorsqu'on s'intéresse à l'éventualité de trouver une concentration locale excédant un certain seuil critique. Les fluctuations locales ne peuvent alors pas être déterminées à partir de la concentration moyenne puisqu'elles sont associées à ses moments d'ordres plus élevés. Les statistiques d'ordre deux, comme par exemple la corrélation spatiale d'un scalaire passif, peuvent s'exprimer en fonction du mouvement relatif de deux traceurs de l'écoulement turbulent. Dans la plus grande partie des applications, comme par exemple la météorologie, l'ingénierie mécanique, la biologie, cette dynamique est approchée par le modèle de diffusivité turbulente de Richardson.

Etudier la dispersion de paires en turbulence consiste à comprendre le comportement statistique de la séparation $\mathbf{R}(t) = \mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t)$ entre deux traceurs. L'argument de Richardson [1] peut s'interpréter en faisant l'hypothèse que la différence de vitesse $\mathbf{V}(t) = \delta_r \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}_1, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_2, t)$ sur une séparation $r = |\mathbf{R}|$ a un temps de corrélation bien plus court que les échelles auxquelles le système est observé. Cela signifie que l'on peut appliquer le théorème de la limite centrale pour écrire

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V} \simeq \sqrt{\tau_L} \mathbf{U}(\mathbf{R}) \xi(t), \quad (1)$$

où ξ est le bruit blanc standard tridimensionnel, $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \langle \delta_r \mathbf{u} \otimes \delta_r \mathbf{u} \rangle$ est le tenseur de corrélation des différences de vitesse eulériennes et τ_L est le temps de corrélation lagrangien des différences de vitesse

entre une paire de traceurs séparés d'une distance $r = |\mathbf{R}|$. Comme cela a été souligné par Obukhov [2], lorsque l'on suppose que les propriétés d'échelle de l'écoulement sont données par Kolmogorov 1941, on a $\tau_L \sim \varepsilon^{-1/3} r^{2/3}$, $\mathbf{U} \sim \varepsilon^{-1/3} r^{1/3}$, où ε désigne le taux moyen de dissipation d'énergie, et l'équation de Fokker–Planck associée à (1) correspond de façon exacte à celle écrite par Richardson pour la densité de probabilité $p(r, t)$ de la distance entre les traceurs. En particulier, cette approche prédit que la distance carrée moyennée sur toutes les paires qui sont initialement à une distance $|\mathbf{R}(0)| = r_0$ se comporte aux temps longs comme

$$\langle |\mathbf{R}|^2 \rangle_{r_0} \simeq g \varepsilon t^3, \quad (2)$$

où g est une constante universelle. Ce comportement est indépendant de la séparation initiale r_0 , d'où son nom de *loi explosive*. Cette perte de mémoire ne peut se produire que sur des échelles de temps plus longues que le temps de corrélation $\tau_L(r_0) \sim r_0^{2/3}$ de la différence de vitesse initiale. Aux temps $t \ll \tau_L(r_0)$, il n'est pas possible d'utiliser l'approximation (1) vu que les différences de vitesse gardent plus ou moins leur valeur initiale. Ceci correspond au régime balistique introduit par Batchelor [3]

$$\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0} \simeq t^2 S_2(r_0), \quad (3)$$

où $S_2(r) = \langle |\delta_r \mathbf{u}|^2 \rangle$ est la fonction de structure eulérienne d'ordre deux sur une séparation r . L'approche diffusive (1) peut toutefois être modifiée pour prendre en compte le régime balistique [4]. Néanmoins, un temps de corrélation court pour les différences de vitesse peut difficilement être justifié et semble contredire la phénoménologie de la turbulence. En effet, comme cela a été souligné dans [5], si r croît comme $t^{3/2}$, le temps de corrélation lagrangien τ_L est alors de l'ordre de $r^{2/3} \sim t$, et il est donc toujours de l'ordre du temps d'observation. Les propriétés de dispersion relative dépendent très fortement des temps de corrélation de l'écoulement, comme cela a été montré dans [6]. Malgré ces contradictions apparentes, l'approche diffusive de Richardson donne une très bonne approximation pour décrire certains régimes intermédiaires aux temps suffisamment longs et pour des séparations proches des valeurs typiques [7–9].

Nous nous efforçons dans ce travail de donner un nouvel angle d'approche à ce problème. Nous utilisons pour cela les résultats de simulations numériques directes de l'équation de Navier–Stokes effectuées avec 4096^3 points de grille pour atteindre un nombre de Reynolds à la micro-échelle de Taylor aux alentours de $R_\lambda \approx 730$. Cet écoulement transporte 10^7 traceurs. Une fois qu'un régime statistiquement stationnaire est atteint, nous commençons l'analyse de la dispersion de paires. Pour cela nous repérons à un instant initial arbitraire (que nous fixons ici égal à $t = 0$) tous les couples de traceurs qui sont à une distance $|\mathbf{R}(0)| = r_0 \pm 2\%$ pour différentes valeurs de r_0 .

2 Échelles de temps de convergence vers le régime explosif

L'objectif est ici de mieux comprendre quelle est l'échelle de temps de convergence vers la loi explosive $\propto t^3$ de Richardson. Pour commencer, réécrivons le comportement balistique de Batchelor (3) en prenant en compte les termes sous-dominants. Un développement de Taylor conduit à

$$\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0} = t^2 S_2(r_0) + t^3 \langle \delta_{r_0} \mathbf{u} \cdot \delta_{r_0} \mathbf{a} \rangle + \mathcal{O}(t^4). \quad (4)$$

Ici, $\delta_r \mathbf{a}$ désigne l'incrément eulérien de l'accélération du fluide. Tant que le premier terme (proportionnel à t^2) du membre de droite est dominant, les traceurs se séparent de façon balistique. Il est clair que le développement perd sa validité lorsque le second terme devient du même ordre. Cela se produit lorsque $t \approx t_0 = S_2(r_0) / |\langle \delta_{r_0} \mathbf{u} \cdot \delta_{r_0} \mathbf{a} \rangle|$. Il est connu que dans un écoulement turbulent et pour des séparations aux échelles inertielles, la corrélation entre les différences de vitesse et d'accélération vérifie $\langle \delta_{r_0} \mathbf{u} \cdot \delta_{r_0} \mathbf{a} \rangle \simeq -2\varepsilon$ (voir, par exemple, [5]). Cette relation est exacte et ne repose pas sur des arguments dimensionnels. Elle peut être vue comme la version lagrangienne de la célèbre loi des 4/5. Ceci implique que pour une séparation initiale r_0 à l'intérieur de la gamme d'échelles inertielles, le régime balistique pour la séparation de traceurs se termine à un temps de l'ordre de $t_0 \simeq S_2(r_0) / (2\varepsilon)$. Cette échelle de temps peut s'interpréter comme le temps nécessaire pour dissiper avec le taux moyen ε l'énergie cinétique typiquement contenue à l'échelle r_0 . On s'attend à ce que ce temps soit de l'ordre du temps de corrélation de la différence de

vitesse initiale entre traceurs. Il est en principe différent du temps de retournement qui est lui de l'ordre de $\tau_{r_0} = r_0/S_2^{1/2}(r_0)$. Dans le cas d'un écoulement intermittent où $S_2(r_0) \propto r_0^{\zeta_2}$ avec $\zeta_2 > 2/3$, le rapport entre le « temps de dissipation » t_0 et le temps de retournement τ_{r_0} croît en fonction de r_0 .

L'introduction du temps t_0 dans le développement (4) conduit à écrire pour $t \ll t_0$

$$\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0} = t_0^2 S_2(r_0) (t/t_0)^2 [1 - t/t_0] + \mathcal{O}(t/t_0)^4. \quad (5)$$

La figure 1 (gauche) montre l'évolution temporelle du déplacement carré moyen pour différentes valeurs de la séparation initiale r_0 . Clairement, un fois le temps adimensionné par t_0 et les distances carrées moyennes par $t_0^2 S_2(r_0)$, toutes les mesures se concentrent sur une même courbe lorsque r_0 est suffisamment loin dans la gamme d'échelles inertielles. Aux temps courts, les données sont en bon accord avec (5).

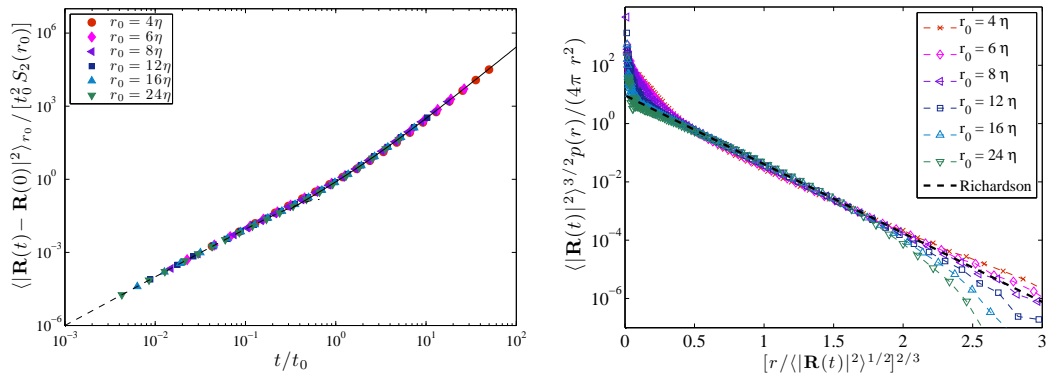


Figure 1. Gauche : Séparation carrée moyenne entre deux traceurs en fonction du temps et pour différentes séparations initiales r_0 . La ligne en tirets représente les deux termes dominants dans le régime de Batchelor (5). La ligne continue correspond au régime de Richardson (2) avec $g = 0.525$. Droite : densité de probabilité de la distance r au temps $t = 5t_0$ pour différentes valeurs de la séparation initiale. Nous l'avons ici normalisée par $4\pi r^2$ et représentée sur un axe log y en fonction de $r/\langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle_{r_0}^{1/2}$. Avec un tel choix, la distribution de Richardson (7) apparaît comme une droite (représentée ici en tirets).

Aussi, une observation importante sur la figure 1 (gauche) est que la concentration des différentes données se prolonge au delà de t_0 et est toujours valide lorsque les séparations tendent vers le régime en t^3 de Richardson. Un tel fait implique que t_0 n'est pas seulement le temps de départ du régime balistique mais aussi celui de convergence vers le comportement explosif. Les données numériques suggèrent qu'aux temps longs la séparation moyenne carrée se comporte comme

$$\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0} = g \varepsilon t^3 [1 + C t_0/t] + \mathcal{O}(t/t_0). \quad (6)$$

Maintenant que nous avons identifié les échelles de temps de convergence vers le régime explosif de Richardson, intéressons nous plus avant aux statistiques de la séparation. Nous avons représenté sur la figure 1 (droite) la densité de probabilité $p(r, t)$ de la distance $r = |\mathbf{R}(t)|$ pour différentes valeurs de la séparation initiale et à l'instant $t = 5t_0$ clairement à l'intérieur du régime explosif. Ces mesures sont comparées à la loi diffusive de Richardson qui prédit

$$p(R, t) \propto \left[r^2 / \langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle_{r_0}^{3/2} \right] \exp \left[-A r^{2/3} / \langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle_{r_0}^{1/3} \right], \quad (7)$$

où A est une constante positive. Les données suggèrent que le cœur de la distribution (pour $0.4 \leq r / \langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle_{r_0}^{1/2} \leq 4$) est assez bien décrit par l'approche de Richardson. Toutefois, des déviations sont clairement observées dans les queues lointaines de la distribution, aussi bien aux grandes qu'aux petites valeurs de la séparation. Comme cela est détaillé dans [10], nous observons un comportement $\propto r^{\alpha(t)}$

aux petites séparations et $\propto \exp(-Cr^{\beta(t)})$ aux grandes distances. Aux temps longs, on observe que les exposants ne s'approchent pas des valeurs $\alpha = 2$ et $\beta = 2/3$ prédites par l'approche de Richardson. Il semble que $\alpha \rightarrow 1$ et $\beta \rightarrow 1$, et donc de plus grandes concentrations à petite échelle et des grandes séparations moins probables. Ceci suggère que les événements extrêmes sont bien moins dispersés.

3 Comportement diffusif des différences de vitesse

Nous nous intéressons maintenant à l'évolution de la composante longitudinale $V_{\parallel}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{V}(t)/|\mathbf{R}(t)|$ de la différence de vitesse entre les traceurs. Initialement la valeur moyenne de cette quantité est nulle ; ceci est dû à la stationnarité statistique de l'écoulement. Aux temps $t \ll t_0$ dans le régime balistique de Batchelor, les paires maintiennent leur différence de vitesse initiale et on peut aisément voir que $\langle V_{\parallel}(t) \rangle_{r_0} \simeq t \langle |\mathbf{V}_{\perp}(0)|^2 \rangle_{r_0} / r_0$, où \mathbf{V}_{\perp} désigne les composantes de \mathbf{V} dans les directions transverses à \mathbf{R} . Il est donc clair que la vitesse moyenne à laquelle les traceurs se séparent devient immédiatement positive. La figure 2(gauche), qui représente l'évolution temporelle de $\langle V_{\parallel}(t) \rangle_{r_0}$, montre sans aucun doute cette croissance linéaire initiale.

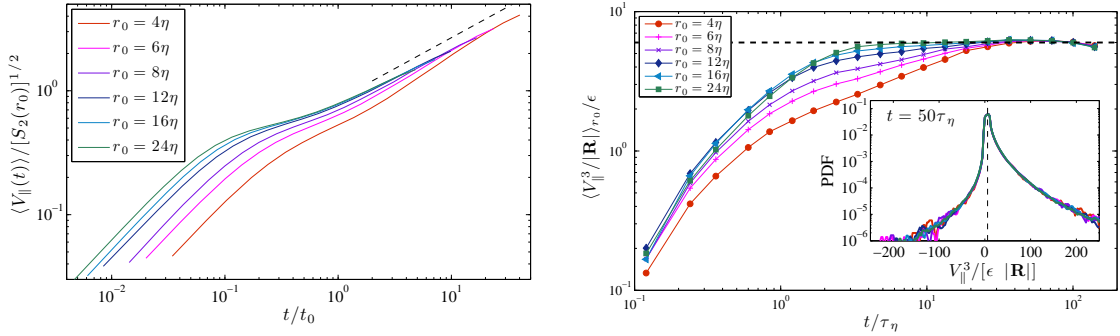


Figure 2. Droite : Evolution temporelle de la différence de vitesse longitudinale moyenne $\langle V_{\parallel}(t) \rangle_{r_0}$ pour différentes séparations initiales. La ligne en tirets à droite a une pente 1/2. Gauche : Evolution temporelle du taux local de transfert d'énergie moyen $\langle V_{\parallel}^3 / |\mathbf{R}| \rangle$ pour différentes valeurs de la séparation initiale. Encart : densité de probabilité de $V_{\parallel}^3 / |\mathbf{R}|$ à l'instant $t = 50 \tau_{\eta}$.

Après cette croissance initiale, la séparation des trajectoires décélère pour atteindre lentement le comportement diffusif $\langle V_{\parallel}(t) \rangle_{r_0} \propto t^{1/2}$ qui est le pendant du régime de Richardson pour les différences de vitesse. Comme cela est montré dans [10], les fluctuations de la vitesse restent quant à elles très fortes. La skewness et la flatness de la distribution de V_{\parallel} gardent jusqu'à des temps très longs une forte dépendance en la séparation initiale r_0 . Cela peut s'expliquer de manière qualitative grâce à l'intermittence de l'écoulement. Les différences de vitesse violentes sont plus probables aux petites qu'aux grandes échelles. Cela implique que les paires avec une petite séparation initiale ont plus probablement de grandes différences de vitesse initiales. Elles vont donc se séparer plus rapidement et elles vont donc rapidement rencontrer d'encore plus grandes valeurs de la vitesse. Cet accroissement rapide et violent des fluctuations de leur différence de vitesses est ainsi dû à une sorte d'effet boule de neige.

Pour mieux comprendre le comportement aux temps long des différences de vitesse, intéressons nous aux statistiques des différences d'accélération entre les deux traceurs. Il est bien connu en turbulence que l'accélération, qui est une grandeur à petite échelle, est corrélée sur des temps de l'ordre du temps de retournement τ_{η} à l'échelle dissipative de Kolmogorov [11]. Comme cela a été vu dans [12], les différences d'accélération $\mathbf{A} = (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})(\mathbf{X}_1(t), t) - (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})(\mathbf{X}_2(t), t)$ entre deux traceurs se décorrèlent elles aussi sur des échelles de temps de l'ordre de τ_{η} . Cela suggère que pour des séparations aux échelles inertielles, et pour des échelles de temps bien plus grandes que le temps de Kolmogorov, les différences

d'accélération entre traceurs peuvent être approximées par un processus aléatoire delta-corrélé en temps, de sorte que

$$\mathbf{A}(t) \simeq \sqrt{\tau_\eta^{\text{loc}}} \mathbf{A}(\mathbf{R}, \mathbf{V}) \eta(t), \quad (8)$$

où $\eta(t)$ est de nouveau le bruit blanc standard tridimensionnel. La matrice \mathbf{A} est défini par

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \langle \mathbf{A}(t) \otimes \mathbf{A}(t) | \mathbf{R}, \mathbf{V} \rangle_{r_0}. \quad (9)$$

Nous avons ici utilisé le théorème de la limite centrale de sorte que le produit dans (8) doit être compris au sens de Stratonovich.

Des arguments dimensionnels indiquent que le « temps de Kolmogorov local » τ_η^{loc} et l'amplitude $A = |\mathbf{A}|$ de la différence d'accélération ne dépendent que de la viscosité et du taux local de transfert d'énergie ε_{loc} . Ils s'écrivent comme

$$\tau_\eta^{\text{loc}} \sim \nu^{1/2} \varepsilon_{\text{loc}}^{-1/2} \quad \text{et} \quad A \sim \nu^{-1/4} \varepsilon_{\text{loc}}^{3/4}. \quad (10)$$

Cela nous conduit à écrire le coefficient de diffusion apparaissant dans (8) comme $[\tau_\eta^{\text{loc}}]^{1/2} A \sim \varepsilon_{\text{loc}}^{1/2}$. Cette quantité est indépendante de ν et doit donc avoir une limite finie lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini. Le taux de transfert local est une fonction de la différence de vitesse \mathbf{V} et de la séparation \mathbf{R} . Des arguments dimensionnels suggèrent que $\varepsilon_{\text{loc}} \sim V_\parallel^3 / |\mathbf{R}|$. Toutefois, lorsque $V_\parallel = 0$, on ne s'attend pas à ce que le taux local de transfert s'annule mais il doit plutôt venir d'une contribution des tourbillons de plus grande échelle, de sorte que $\varepsilon_{\text{loc}} \simeq \varepsilon$, le taux moyen. On doit donc avoir $\varepsilon_{\text{loc}}(t) \sim \varepsilon + \alpha V_\parallel^3(t) / |\mathbf{R}(t)|$, où α est un paramètre ajustable. Ces estimations ont été testées avec succès pour les données de simulations numériques dans [12].

Ces considérations phénoménologiques sont purement unidimensionnelles. Elles nous permettent toutefois d'introduire un modèle stochastique pour l'évolution jointe de la séparation $R(t)$ et de la différence de vitesse longitudinale $V_\parallel(t)$ entre deux traceurs

$$dR = V_\parallel dt, \quad dV = -b |V_\parallel| V_\parallel / R dt + [1 + c |V_\parallel|^3 / R]^{1/2} dW_t, \quad (11)$$

où $W(t)$ désigne le processus de Wiener. Le bruit multiplicatif est ici compris au sens d'Itô. Le terme de dérive est dû au changement de définition de l'intégrale stochastique. Toutefois, les constantes b et c ne sont pas directement reliées car leur rapport vient de considérations tensorielles et de la prescription d'incompressibilité de la dynamique lagrangienne. Le terme de dérive, qui est non-linéaire, introduit un « temps de corrélation » égal au temps de retournement $R / |V_\parallel|$.

Bien qu'il ait une forme relativement simple, le modèle défini par (11) ne peut pas être intégré de manière explicite, ni sous sa forme stochastique, ni sous sa forme d'équation de Fokker–Planck. Toutefois, nous pouvons effectuer quelques remarques. Tout d'abord, des simulations numériques de type Monte-Carlo nous ont permis d'observer que ce modèle a un comportement très proche de la dispersion de traceurs dans un écoulement turbulent. La distribution des distances montre notamment une queue algébrique aux petites valeurs et une queue exponentielle étirée aux grandes valeurs. Les exposants associés à ces queues évoluent en fonction du temps d'une manière similaire à celle observée dans les simulations numériques directes.

Aussi, il est facile de vérifier que l'équation de Fokker–Planck associée à (11) admet des solutions invariantes d'échelle de la forme $p(r, v, t) = t^\alpha \Psi(r/t^{3/2}, v/t^{1/2})$. Ce scaling correspond exactement à celui donné par le comportement explosif de Richardson (c'est-à-dire $r \sim t^{3/2}$ et $v \sim t^{1/2}$). Nous avons pu observer numériquement la convergence des solutions de ce système vers un tel régime. Le mécanisme de convergence peut s'interpréter de la manière suivante. Le taux local de transfert d'énergie V_\parallel^3 / R atteint sur des temps très courts un régime statistiquement stationnaire. Par conséquence, l'amplitude de l'accélération, et donc le membre de droite de l'équation d'évolution de V_\parallel , deviennent eux mêmes statistiquement stationnaires. Cela implique un comportement diffusif aux temps longs de la différence de vitesse entre les traceurs. La loi de Richardson $R \propto t^{3/2}$ est une conséquence de la diffusion de la vitesse. Nous avons pu vérifier ce scénario avec les données des simulations numériques directes. Comme

cela est montré sur la figure 2(droite), le taux de transfert local le long des paires de trajectoires devient statistiquement stationnaire sur des temps de l'ordre du temps de retournement τ_η à l'échelle de Kolmogorov.

4 Conclusion

L'un des principaux résultats de cette étude est de réinterpréter le régime explosif de Richardson comme une conséquence d'un comportement diffusif des différences de vitesses entre traceurs. Deux observations permettent d'appuyer ce raisonnement. D'une part, les différences d'accélération entre traceurs sont corrélées sur un temps court, de l'ordre du temps dissipatif de Kolmogorov, et ceci nous permet de les approcher par un bruit blanc. D'autre part, l'amplitude de ce bruit ne dépend que du taux local de transfert $\langle [V^\parallel]^3/R \rangle_{r_0}$ qui se stabilise vers un comportement stationnaire sur de petites échelles de temps. Ce comportement, qui d'après nous n'a jamais été observé auparavant, donnent des contraintes fortes pour le développement et la validation de modèles stochastiques markoviens pour la dispersion relative en turbulence.

Une question centrale qui reste ouverte concerne les mécanismes physiques qui conduisent à la convergence rapide du taux local de transfert vers un régime statistiquement stationnaire. Une piste pour s'attaquer à ce problème pourrait être de pousser plus avant l'étude du modèle stochastique. Toutefois, cela nécessite de l'étendre au cas tridimensionnel pour notamment prendre en compte l'incompressibilité de l'écoulement via la structure tensoriel des corrélations de l'accélération. Ceci va au delà de l'étude présentée ici et sera étudié dans des travaux futurs.

Les simulations numériques ont été effectuées sur la machine IBM BlueGene/P JUGENE du centre de calcul de Jülich (Allemagne) grâce au projet XXL HBO28. La recherche conduisant à ces résultats a reçu un financement du Conseil Européen de la Recherche dans le cadre du 7^e programme cadre de la communauté européenne (FP7/2007-2013, accord de bourse n° 240579).

Références

1. L. F. RICHARDSON, Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph, *Proc. Roy. Soc. London A*, **110**, 709 (1926).
2. A. M. OBUKHOV, On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, **5**, 453 (1941).
3. G. K. BATCHELOR, Diffusion in a field of homogeneous turbulence. II. The relative motion of particle, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48**, 345 (1952).
4. R. H. KRAICHNAN. Dispersion of particle pairs in homogeneous turbulence. *Phys. Fluids*, **9**, 1937 (1966).
5. G. FALKOVICH, K. GAWĘDZKI & M. VERGASSOLA, Particles and fields in fluid turbulence, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 913, (2001).
6. M. CHAVES, K. GAWĘDZKI, P. HORVAI, A. KUPIAINEN & M. VERGASSOLA, Lagrangian dispersion in Gaussian self-similar ensembles, *J. Stat. Phys.*, **113**, 643 (2003).
7. L. BIFERALE, G. BOFFETTA, A. CELANI, B. DEVENISH, A. LANOTTE & F. TOSCHI, Lagrangian statistics of particle pairs in homogeneous isotropic turbulence, *Phys. Fluids*, **17**, 115101 (2005).
8. N. OUELLETTE, H. XU, M. BOURGOIN & E. BODENSCHATZ, An experimental study of turbulent relative dispersion models, *New J. Phys.*, **8**, 109 (2006).
9. G. L. EYINK, Stochastic flux freezing and magnetic dynamo, *Phys. Rev. E*, **83**, 056405 (2011).
10. R. BITANE, H. HOMANN & J. BEC, Geometry and violent events in turbulent pair dispersion, *Journal of Turbulence*, sous presse (2013).
11. N. MORDANT, A. M. CRAWFORD & E. BODENSCHATZ, Three-dimensional structure of the Lagrangian acceleration in turbulent flows, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 214501 (2004).
12. R. BITANE, H. HOMANN & J. BEC, Time scales of turbulent relative dispersion, *Phys. Rev. E*, **86**, 045302 (2012).