Formes normales d'observabilités quadratiques de Poincaré

Driss Boutat[1], Latifa Boutat-Baddas[2] & Jean-Pierre Barbot[3]

[1] Loire Valley University, ENSI de Bourges, Institut PRISME, 88, Boulevard Lahitolle 18020 Bourges Cedex
[2] CRAN-CNRS, UHP NancyI, IUT de Longwy 186, rue de Lorraine, 54400 Cosnes-et-Romain
[3] ECS ENSEA, 6, avenue du Ponceau 95014 Cergy-Pontoise Cedex, et EPI Non-A, INRIA Lille-Nord Europe, France
driss.boutat@ensi-bourges.fr

Résumé. Les conditions géométriques, introduites par Krener et Isidori [2], pour la mise sous forme normale d'observabilité de Brunovsky [7] d'un système non linéaire, sont souvent trop restrictives. En théorie du contrôle, l'observabilité est la propriété structurelle de pouvoir retrouver toutes les variables d'état d'une dynamique à partir d'un ensembles de variables mesurées. Pour les systèmes linéairement observables avec un mode inobservable, dans [6], nous nous sommes basés sur l'approche de l'approximation quadratique de Poincaré [1] pour mettre au point une forme normale modulo l'injection de termes quadratiques entrées-sorties. Cette forme permet de concevoir des observateurs non-linéaires simples (souvent appelés, dans l'industrie, capteurs logiciels). Ceci est due aux faits que les propriétés d'observabilité sont clairement exprimées sous cette forme et que la structure choisie pour représenter chaque classe d'équivalence est dédiée à la synthèse d'observateurs. Grâce à ceci, nous avons donné plusieurs applications en cryptographie [5]. Dans cette communication, comme un complément de notre précédente approche, nous revenons au concept de base géométrique pour les systèmes mono sortie linéairement observables, afin de mettre en évidence les propriétés structurelles géométriques par rapport à la sortie. Nous mettons en évidence une caractérisation géométrique des systèmes non linéaires dont la partie quadratique s'annule grâce un changement de coordonnées. Nous proposons la même analyse, que celle de Kang et Krener [3] et celle de Boutat et Barbot [4] pour les systèmes commandables.

Abstract. This paper deals with observability quadratic normal forms for linearly observable systems. Particularly, we will give necessary and sufficient geometrical conditions which guarantee the existence of a quadratic transformation that cancels all quadratique terms, modulo those are functions of the output. In the end of this paper, we give an example to highlight our purpose.

1 Introduction

L'une des formes normales d'observabilité la plus connue s'écrit comme suit [2]

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \beta(y) \\ y = z_n \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

où $z = (z_1, ..., z_n)^T$ est l'état du système et y est la sortie (l'état mesuré). L'intérêt essentiel de cette forme est qu'elle supporte un observateur de type Luenberger à savoir :

$$\dot{\widehat{z}} = A\widehat{z} + \beta(y) + K(y - \widehat{y}) \tag{2}$$

de sorte que l'erreur d'observation $e = z - \widehat{z}$ entre l'état réel z du système et son état estimé $\widehat{z}$ est régie par une dynamique linéaire :

$$\dot{e} = (A + KC)e \tag{3}$$

où le gain K est choisi afin de faire converger l'état estimé vers l'état réel.

En général, la mise sous forme normale d'un système non linéaire à l'aide d'un changement de coordonnées est soumise à des conditions géométriques très restrictives. C'est pour cela que la recherche d'une forme quadratique observable est utile pour l'analyse de l'observabilité. Dans cet article, nous allons donner une caractérisation géométrique de la nullité des termes quadratiques d'un système non linéaire modulo des termes qui ne dépendent que de la sortie. Ce document est organisé comme suit : la section 2 est dédiée aux notations, définitions et à la présentation du problème à résoudre. La section 3 est dédiée à la linéarisation quadrtique modulo une injection des grandeurs mesurées. La section 4 présente brièvement un exemple académique.

2 Notations et définitions

On considère dans un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^n$ le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{4}$$

où $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont supposés analytiques avec $f(0) = 0$ et $h(0) = 0$. On suppose que ce système est observable, c'est-à-dire que la codistribution $span\left\{dh, dL_f h, ..., dL_f^{n-1}h\right\}$ est de rang n en 0. Dans ce cas, le système (4) peut s'écrire comme suit [7]

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + f^{[2]}(\xi) + O^{[3]}(\xi) \\ y = \xi_n \end{cases} \tag{5}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & ... & ... & ... & a_1 \\ 1 & 0 & ... & ... & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & ... \\ 0 & ... & 0 & 1 & a_n \end{bmatrix} \text{ et } f^{[2]}(\xi) = \begin{bmatrix} f_1^{[2]}(\xi) \\ f_2^{[2]}(\xi) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n^{[2]}(\xi) \end{bmatrix}$$

pour $1 \leq i \leq n$, avec $f_i^{[2]}(\xi)$ un polynôme homogène de degré 2 en ξ.

Définition 1.

1. Le terme $f^{[2]}(\xi)$ s'appelle la partie quadratique du système (5).
2. Une transformation quadratique de Poincaré est un changement de coordonnées de la forme suivante :

$$z = \xi + \psi^{[2]}(\xi)$$

où

$$\psi^{[2]}(\xi) = \left(\psi_1^{[2]}(\xi), \psi_2^{[2]}(\xi), ..., \psi_n^{[2]}(\xi)\right)^T$$

pour $1 \leq i \leq n$, avec $\psi_i^{[2]}(\xi)$ un polynôme homogène de degré 2 en ξ.

Soit $E = \mathbb{R}^n\left[y^2\right]$ l'espace vectoriel dont les éléments sont $(b_1, ..., b_n)^T y^2$ avec $(b_1, ..., b_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Définition 2. On dit que le système (5) est quadraticalement équivalent à un autre système de la forme

$$\dot{z} = Az + g^{[2]}(z) + O^{[3]}(z)$$

s'il existe une transformation quadratique de Poincaré qui transforme $f^{[2]}(\xi)$ en $g^{[2]}(z)$.

si $g^{[2]}(z)$ est définie modulo E, on dit que l'équivalence est définie modulo une injection de sortie.

Si $g^{[2]}(z) = 0$, on dit que (5) est quadratiquement linéarisable.

Si $g^{[2]}(z) \in E$, alors on dit (5) est quadratiquement linérisable modulo une injection de sortie.

La méthode algébrique de caractérisation des équivalences quadratiques modulo une injection de sortie est donnée dans [3,4,6,5,8,9] en utilisant les équations homologiques de Poincaré :

$$A\psi^{[2]}(z) - \frac{\partial \psi^{[2]}(z)}{\partial z} Az = f^{[2]}(z) - g^{[2]}(z) \text{ modulo } E \tag{6}$$

Dans ce document, on propose une méthode géométrique pour déterminer la transformation de Poincaré qui élimine la partie quadratique sous des conditions liées au système non linéaire.

3 Linéarisation quadratique

Dans cette section, on présente les outils de la linéarisation exacte modulo l'injection de sortie due à [2], puis on donnera le résultat correspondant pour la linéarisation quadratique modulo l'injection de sortie. On pose

$$\theta = \left(dh, dL_f h, ..., dL_f^{n-1} h\right)^T := (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n).$$

Les 1-formes θ s'appellent les $1-$formes d'observabilité. Elles constituent une base du fibré cotangent T^*U de U.

Soit Y_1 le champ de vecteur défini par :

$$\begin{aligned} \theta_i(Y_1) &= 0 \text{ pour } \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \theta_n(Y_1) &= 1. \end{aligned}$$

et par induction soit

$$Y_k = (-1)^k \, ad_f^{k-1}(Y_1) \text{ pour } 2 \leq k \leq n,$$

où $ad_f^0 Y_1 = Y_1$ et $ad_f^{k-1}(Y_1) = [Y_{k-1}, f]$ le crochet de Lie de Y_{k-1} et f.

Il est clair que $\{Y_1, ..., Y_n\}$ est une base du fibré tangent TU de U. On a :

$$\theta(Y_1, ..., Y_n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & \ldots & 1 & l_{2,n-1} \\ \vdots & \ldots & 1 & \ldots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ldots & \ldots & \vdots \\ 1 & l_{n,2} & \ldots & \ldots & l_{n,n} \end{bmatrix} := \Lambda$$

où $l_{i,j} = \theta_i(Y_j)$ pour$1 \leq i, j \leq n$. En posant $\omega = \Lambda^{-1}\theta := (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)^T$ pour $1 \leq s \leq n$, nous donnons les composantes de ω par l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} \omega_n &= \theta_1 \\ \omega_{n-r} &= (\theta_{r+1} - \sum_{i=n-r+1}^{n} l_{r+1,i}\omega_i) \text{ for } 1 \leq r \leq n-1. \end{aligned} \tag{7}$$

Le théorème suivant est dû à [2].

Théorème 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) Le système (4) est linéarisable modulo l'injection de sortie
ii) $[Y_i, Y_j] = 0$ *pour* $1 \leq i, j \leq n$,
iii) $d\omega = 0$.
Dans ce cas, le difféomorphisme est donné par $\phi(x) = z$ *avec*

$$z_i = \phi_i(x) = \int_\gamma \omega_i + \phi_i(0) \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

où γ *est un chemin reliant* 0 *à* x *dans un voisinage* $V_0 \subseteq U$ *de* 0.

Le résultat qui suit est le correspondant de la linéarisation quadratique modulo l'injection de sortie. En particulier, la condition de commutativité dans le théorème 1 est remplacée par la commutativité d'ordre 1.

Théorème 2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) le système (5) est quadraticalement linéarisable modulo une injection de sortie,
ii) $[Y_i, Y_j] = O^1(\xi)$ *pour tout* $1 \leq i, j \leq n$,
iii) $[Y_i, Y_{i+1}] = O^1(\xi)$ *pour tout* $1 \leq i \leq n-1$,
iv) $d\omega = O^1(\xi)$
v) $\omega = \beta + O^2(\xi)$ *avec* $d\beta = 0$
Dans ce cas, la transformation quadratique de Poincaré

$$z = \xi + \phi^{[2]}(\xi) := \varphi(\xi)$$

est telle qu'on a $\beta = d\varphi$. *La partie* φ *supprime les termes d'ordre* 2 *modulo la sortie. Dans ces nouvelles coordonnées, le système (5) a la forme suivante :*

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_1 z_n + b_1 z_n^2 + O^{[3]}(z) \\ \dot{z}_j = z_{j-1} + a_j z_n + b_j z_n^2 + O^{[3]}(z) \\ \text{pour tout } 2 \leq j \leq n \end{cases} \tag{8}$$

Démonstration. Les 1-formes d'observabilité du système (8) sont :

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = dz_n \text{et} \\ &\alpha_j = dz_{n-j+1} + \sum_{s=0}^{j-2} k_s^j dz_{n-s} + O^2 := d\mu_j + O^{[2]} \end{aligned}$$

où $k_s^j \in R$ pour tout $2 \leq j \leq n$ et $0 \leq s \leq j-2$. On suppose que le système (5) est quadraticalement linéarisable modulo une injection de sortie à l'aide d'une transformation quadratique de Poincaré $\varphi(\xi) = z$. Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$, les 1-formes d'observabilité du système (8) sont les pull-back des 1-formes d'observabilité θ_i du système (5) i.e. $\varphi^*(\theta_i) = \alpha_i$. or, pour le système (8), on a $\varphi^*(\theta_i) = d\mu_i + O^2$ et par l'algorithme de l'équation (7), on a aussi $\varphi^*(\omega_i) = d\nu_i + O^2$. Ce qui donne, en appliquant $(\varphi^*)^{-1}$, $\omega_i = d(\nu_i o \varphi) + O^2$. Ce qui montre $(i) \Longleftrightarrow (iv) \Longleftrightarrow (v)$.

Maintenant on a $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$. En effet, en utilisant l'identité de Jacobi sur les crochets de Lie on a

$$[Y_i, Y_{i+2}] = -[f, [Y_i, Y_{i+1}]] \text{ pour } 1 \leq i \leq n-2$$

Comme $f = O^1(\xi)$, alors $[Y_i, Y_{i+1}] = O^1(\xi)$ est équivalent à $[Y_i, Y_{i+2}] = O^1(\xi)$. Le résultat s'obtient par récurrence pour $i < j$ par le fait que

$$[Y_i, Y_j] = -[f, [Y_i, Y_{j-1}]] - [Y_{j-1}, Y_{i+1}].$$

Maintenant $(ii) \Longleftrightarrow (v)$. Comme $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ est une base, alors $d\omega = O^1(\xi)$ est équivalent à $d\omega(Y_i, Y_j) = O^1(\xi)$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. On rappelle :

$$d\omega(X, Y) = L_X(\omega(Y)) - L_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \tag{9}$$

Maintenant pour tout $1 \leq i \leq n$ la fonction $\omega(Y_i)$ est constante et on obtient à partir de (9) :

$$d\omega(Y_i, Y_j) = -\omega([Y_i, Y_j]) = O^{[1]}(\xi). \tag{10}$$

Puisque les composantes $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ de ω forment une base du fibré cotangent T^*U de U, alors (10) est équivalente à $[Y_i, Y_j] = O^{[1]}(\xi)$.

Maintenant, on va montrer que la transformation quadratique φ est donnée par $d\varphi = \beta$ et que cela élimine tous les termes d'ordre 2 modulo E.

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\varphi_*(f) = -\varphi_*\left[f, Y_j\right] = -\varphi_*\left(Y_{j+1}\right) = -\beta\left(Y_{j+1}\right)$$

comme $\beta = \omega + O^{[2]}(\xi)$ et $\omega(Y_j) = \frac{\partial}{\partial z_{j+1}}$ pour $1 \leq j \leq n-1$, alors

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\varphi_*(f) = \frac{\partial}{\partial z_{j+1}} + O^{[2]}(z).$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= a_1 z_n + b_1 z_n^2 + O^{[3]}(z) \\
\dot{z}_j &= z_{j-1} + a_j z_n + b_j z_n^2 + O^{[3]}(z) \text{ pour } 2 \leq j \leq n
\end{aligned}$$

parce que :

$$\frac{\partial}{\partial z_n}\varphi_*(f) = -\varphi_*\left[f, Y_n\right] = \sum_{i=1}^{n} a_1 \frac{\partial}{\partial z_i} + O^{[1]}.$$

Remarque 1. Si $a_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$ alors le système est quadratiquement linéarisable si et seulement si

$$\left[Y_i, Y_{i+1}\right] = O^1(\xi) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n,$$

où $Y_{n+1} = \left[Y_n, f\right]$.

Remarque 2. Dans le théorème 2 $(i) \Longleftrightarrow (iv) \Longleftrightarrow (v)$ est vérifiée à n'importe quel ordre $r \geq 2$.

4 Exemple

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases}
\dot{x_1} = x_3 x_2^2 \\
\dot{x_2} = x_1 - 2x_2 x_3 \\
\dot{x_3} = x_2 \\
y = x_3
\end{cases} \tag{11}$$

Les 1-formes d'observabilité sont

$$\theta_1 = dx_3, \quad \theta_2 = dx_2 \quad \text{et} \quad \theta_3 = dx_1 - 2x_3 dx_2 - 2x_2 dx_3.$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \text{ et} \\
Y_3 &= \frac{\partial}{\partial x_3} - 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_3 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}
\end{aligned}$$

Un simple calcul donne :

$$\left[Y_1, Y_2\right] = \left[Y_1, Y_3\right] = 0 \quad \text{et} \quad \left[Y_2, Y_3\right] = 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} = O^1(x).$$

Donc il existe une transformation de Poincaré qui linéairise ce système. Maintenant, on va calculer la transformée de Poincaré. Pour cela, on calcule Λ :

$$\Lambda = \theta(Y_1, Y_2, Y_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2x_3 \\ 1 & -2x_3 & 4x_3^2 + 2x_3x_2 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

On va calculer les composantes de $\omega = \Lambda^{-1}\theta$ et on a : $\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} -2x_2x_3 + 2x_2 & 2x_3 & 1 \\ 2x_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où

$$\begin{aligned} \theta_1 &= dx_3, \theta_2 = dx_2, \\ \theta_3 &= dx_1 - 2x_3dx_2 - 2x_2dx_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dx_1 - 2x_2x_3\,(dx_3) \\ \omega_2 &= 2x_3dx_3 + dx_2 \\ \omega_3 &= dx_3. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= O^1 \\ d\omega_2 &= 0 \\ d\omega_3 &= 0. \end{aligned}$$

D'où la transformation de Poincaré :

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2 + x_3^2 \ \text{ et } z_3 = x_3$$

5 Conclusion

Par cette modeste note, nous voulons participer à l'hommage de Henri Poincaré et démontrer que ses travaux sont aussi d'une très grande actualité et pertinence en théorie du contrôle.

Références

1. H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars (1899)
2. A. Krener & A. Isidori, Linearization by output injection and nonlinear observer, *Systems & Control Letters*, **3**, 47-52 (1983)
3. W. Kang & A. J. Krener, Extended quadratic controller normal form and dynamic state feedback linearization of non linear systems, *SIAM Journal of Control and Optimization*, **30** (6), 1319-1337 (1992)
4. D. Boutat & J.-P. Barbot, Poincaré normal form for a class of driftless systems in a one dimenstional submanifold neighborhood, *Mathematic of Control, Signals & Systems*, **15**, 256-274 (2002)
5. L. Boutat-Baddas, J.-P. Barbot, D. Boutat & R. Tauleigne, Observability bifurcation versus observing bifurcations, *Proceedings of the 15th IFAC* (2002)
6. L. Boutat-Baddas, D. Boutat & J.-P. Barbot, Observability analysis by Poincaré normal forms, *Mathematics of Control Signals and Systems*, **21** (2), 147-170 (2009)
7. P. Brunovsky, A classification of linear controllable systems, *Kybernetika*, **6**, 173-188 (1970)
8. L. Boutat-Baddas, D. Boutat, J-P. Barbot & R. Tauleigne, Quadratic Observability normal form, *Proceeding of IEEE CDC 01* (2001)
9. L. Boutat-Baddas, *Analyses des singularités d'observaibilté et de détectabilité : applications à la synchronisation des circuits électroniques chaotiques*, Thèse de l'Université de Cergy-Pontoise, (2002)