

# Instabilité d'une onde plane d'inertie par résonance triadique

Pierre-Philippe Cortet<sup>1</sup>, Guilhem Bordes<sup>2</sup>, Frédéric Moisy<sup>1</sup> & Thierry Dauxois<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire FAST, CNRS, Univ Paris Sud, UPMC Univ Paris 06, France

<sup>2</sup> Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon, CNRS et Université de Lyon, France  
ppcortet@fast.u-psud.fr

**Résumé.** Nous présentons dans ce travail la première observation expérimentale de la déstabilisation d'une onde plane d'inertie par une instabilité paramétrique. La motivation fondamentale de ce travail est le rôle clé joué par ce type d'instabilités par résonance triadique dans les transferts d'énergie entre échelles en turbulence en rotation. Nous excitons une onde plane d'inertie grâce à un générateur, composé d'un empilement de plaques oscillant autour d'un arbre à cames, installé dans un aquarium en rotation. Grâce à des mesures par vélocimétrie par image de particules, nous observons que l'onde plane générée subit une instabilité sous-harmonique qui excite deux ondes planes secondaires. Les fréquences et les vecteurs d'ondes de ces ondes secondaires sont en accord quantitatif avec les prédictions théoriques pour une résonance triadique. Les vecteurs d'ondes secondaires sont en particulier systématiquement plus normaux à l'axe de rotation que le vecteur d'onde primaire : cette caractéristique illustre le mécanisme de base à l'origine des transferts d'énergie vers les modes lents quasi-2D de la turbulence en rotation.

**Abstract.** Plane inertial waves are generated using a wavemaker, made of oscillating stacked plates, in a rotating water tank. Using particle image velocimetry, we observe that, after a transient, the primary plane wave is subject to a subharmonic instability and excites two secondary plane waves. The measured frequencies and wavevectors of these secondary waves are in quantitative agreement with the predictions of the triadic resonance mechanism. The secondary wavevectors are found systematically more normal to the rotation axis than the primary wavevector: this feature illustrates the basic mechanism at the origin of the energy transfers towards slow, quasi two-dimensional, motions in rotating turbulence.

## 1 Introduction

Les fluides en rotation sont le support d'une classe d'ondes singulières, les ondes d'inertie, qui jouent un rôle fondamental dans la dynamique des écoulements géo- et astro-physiques [1, 2]. Ces ondes sont remarquables de par leur vitesse de groupe normale à leur vitesse de phase ainsi que par leur fréquence qui sélectionne leur direction de propagation mais pas leur longueur d'onde [2, 3].

Nous présentons dans ce travail la première observation expérimentale de la déstabilisation d'une onde plane d'inertie par une instabilité paramétrique [4]. La motivation fondamentale de ce travail est le rôle clé joué par ce type d'instabilités par résonance triadique dans les transferts d'énergie entre échelles en turbulence en rotation [5–7]. L'instabilité observée illustre en effet le mécanisme de base des transferts anisotropes vers des modes de vecteurs d'ondes toujours plus horizontaux (l'axe de rotation est vertical) qui construisent la bidimensionnalité de la turbulence en rotation.

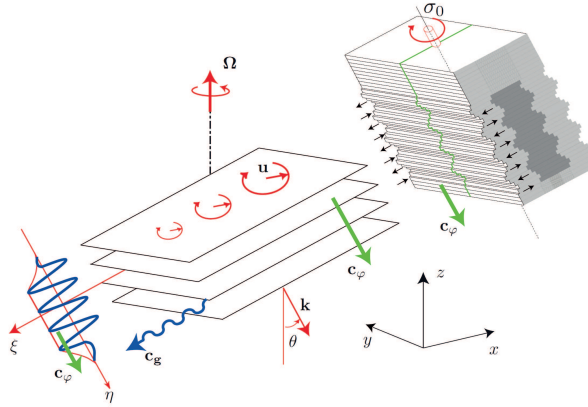
L'instabilité que nous rapportons est analogue à celle que subit un pendule pesant forcé à deux fois sa fréquence propre. Dans le cas des ondes d'inertie, le paramètre est le taux de rotation  $\Omega$  du fluide qui est modulé localement par la présence d'une onde de fréquence  $\sigma_0$ . L'instabilité de l'onde primaire induit alors à travers une résonance non-linéaire un transfert d'énergie vers deux ondes secondaires de fréquences  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  plus faibles. Comme un continuum de fréquences peut être excité,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ne sont ici pas nécessairement égales à la moitié  $\sigma_0/2$  de la fréquence d'excitation, mais vérifient la relation de résonance  $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_0$ . En l'absence de dissipation, on retrouve la résonance paramétrique standard avec  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0/2$ . C'est la viscosité qui lève cette dégénérescence des fréquences  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  qui se répartissent alors de part et d'autre de  $\sigma_0/2$ .

Dans notre expérience, l'onde primaire est excitée par un générateur, composé d'un empilement de plaques oscillant autour d'un arbre à cames, qui reproduit les conditions aux limites d'une onde plane [8,9]. Ce générateur est placé dans un aquarium rempli d'eau sur notre plateforme tournante. Grâce à une mesure des champs de vitesse par vélocimétrie par image de particules dans le référentiel tournant, nous montrons qu'après un régime transitoire, l'onde plane subit une instabilité qui conduit à l'excitation de deux ondes planes sous-harmoniques dont les vecteurs d'ondes sont systématiquement plus horizontaux que celui de l'onde primaire. Les transferts d'énergie à l'intérieur de cette triade d'ondes sont alors décrits quantitativement grâce à la décomposition de l'équation de Navier-Stokes en modes hélicoïdaux introduite par Waleffe en 1992 [10].

Nous montrons que la direction —vers les grandes ou les petites échelles— des transferts d'énergie dépend de l'amplitude de l'onde primaire et de la viscosité. En turbulence en rotation, le bilan de cette compétition entre transferts directs et inverses est au coeur du problème complexe de la direction des cascades d'énergie.

## 2 Génération d'une onde plane d'inertie

Nous rappelons d'abord les propriétés principales des ondes d'inertie dans un fluide en rotation à une vitesse angulaire constante  $\Omega$ . Dans le référentiel tournant, c'est l'action de rappel de la force de Coriolis qui est responsable de la propagation de ces ondes pour des pulsations  $\sigma \leq f$ , où  $f = 2\Omega$  est le paramètre dit de Coriolis. Les particules fluides excitées à la pulsation  $\sigma$  décrivent alors des cercles anticycloniques dans un plan incliné d'un angle  $\theta = \cos^{-1}(\sigma/f)$  avec l'horizontale. La phase de ce mouvement circulaire se propage perpendiculairement à ce plan incliné.



**Figure 1.** Représentation schématique du générateur d'ondes. L'onde plane excitée a une fréquence  $\sigma_0$ , une vitesse de phase vers le bas, une hélicité négative ( $s_0 = -1$ ), et se propage selon l'angle  $\theta = \cos^{-1}(\sigma_0/f)$ , où  $f = 2\Omega$ .

Les équations du mouvement pour un fluide en rotation à  $\Omega = f/2$  autour de l'axe  $z$  sont

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

où  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  est le champ de vitesse en coordonnées cartésiennes  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Dans la suite, nous nous restreignons au cas d'un écoulement invariant selon la direction  $y$ . Le fluide étant incompressible, le mouvement peut alors être décrit par une fonction de courant  $\psi(x, z)$ , telle que  $\mathbf{u} = (\partial_z \psi, u_y, -\partial_x \psi)$ . En considérant une solution de type onde plane de fréquence  $\sigma$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (k, 0, m)$ ,

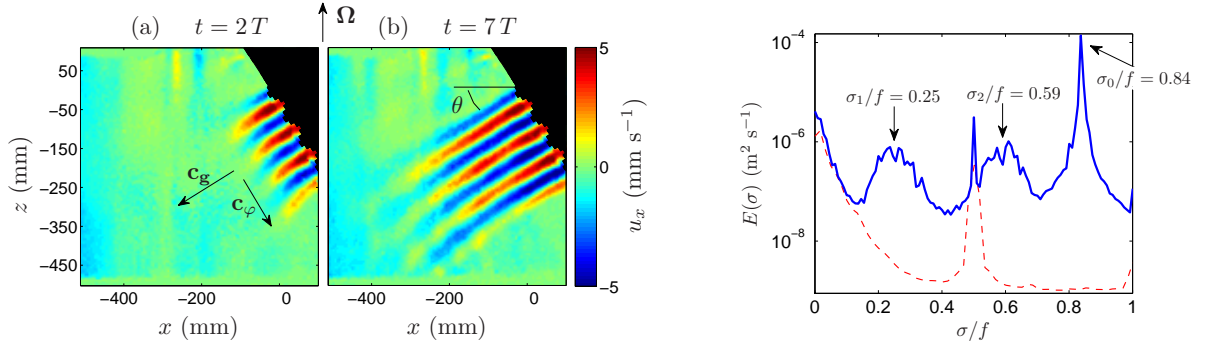
$$\psi(x, z, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)} + \text{c.c.}, \quad (2)$$

(où c.c. signifie complexe conjugué), nous obtenons la relation de dispersion anisotrope des ondes d'inertie

$$\sigma = sf \frac{m}{\kappa} = sf \cos \theta, \quad (3)$$

avec  $\kappa = (k^2 + m^2)^{1/2}$ ,  $s = \pm 1$ , et  $\theta$  l'angle entre  $\mathbf{k}$  et l'axe de rotation (Fig. 1). La phase d'une telle onde se propage avec une vitesse  $\mathbf{c}_\varphi = \sigma \mathbf{k} / \kappa^2$  normale à sa vitesse de groupe  $\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \sigma$ . La vorticité de l'onde  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  est alignée en chaque point avec la vitesse,  $\boldsymbol{\omega} = -s\kappa \mathbf{u}$ , ce qui justifie le nom d'ondes hélicoïdales parfois donnée aux ondes d'inertie. Le signe  $s$  dans l'équation (3) identifie le signe de l'hélicité de l'onde  $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$ .

Pour exciter une telle onde plane d'inertie, nous utilisons un générateur [9] consistant en une série de plaques oscillantes empilées autour d'un arbre à cames hélicoïdal. Lorsque l'arbre à cames tourne à la fréquence  $\sigma_0$ , les plaques se mettent à osciller avec un déphasage régulier permettant de reproduire la condition aux limites d'une onde plane d'inertie. Le générateur d'onde est placé dans un aquarium de 120 cm de longueur sur 80 cm de largeur, rempli d'eau jusqu'à 58 cm. L'aquarium est lui même placé sur la plateforme tournante « Gyroflow » de 2 m de diamètre dont la vitesse de rotation  $\Omega$  est fixée dans un intervalle allant de 1.05 à 3.15 rad s<sup>-1</sup>. L'angle de propagation de l'onde d'inertie est modifié en changeant le taux de rotation de la plateforme en gardant constant la fréquence du générateur  $\sigma_0 = 1.05$  rad s<sup>-1</sup>. Le paramètre de Coriolis a ainsi été varié de  $f = 1.004 \sigma_0$  à  $3 \sigma_0$ , correspondant à des angles  $\theta$  allant de 5    70 .



**Figure 2.** Gauche : Champ de vitesse horizontale, 2 et 7 périodes après le démarrage du générateur, pour  $\sigma_0/f = 0.84$ . Droite : Spectre temporel d'énergie pour deux expériences réalisées à  $\Omega = 0.63$  rad s<sup>-1</sup> avec (ligne continue) et sans (ligne tiretée) génération d'onde à  $\sigma_0/f = 0.84$ .

Les champs de vitesse sont mesurés (Fig. 2 gauche) dans un plan vertical grâce à un système de vélocimétrie par image de particules (PIV) embarqué dans le référentiel tournant [4]. La figure 2 (gauche) montre des champs de vitesse typiques, 2 et 7 périodes  $T = 2\pi/\sigma_0$  après le démarrage du générateur, pour une expérience réalisée à  $\sigma_0/f = 0.84$ . On y reconnaît une onde plane d'inertie respectant toutes les caractéristiques attendues.

### 3 Instabilité sous-harmonique

Après quelques périodes d'excitation, le front de l'onde d'inertie est sorti de la région de mesure et l'onde peut être considérée comme stationnaire. Cependant, après typiquement 15 périodes de l'onde, celle-ci devient instable et présente des modulations lentes à des échelles légèrement plus petites que la longueur d'onde excitée. Pour mieux comprendre ce phénomène, nous avons calculé le spectre temporel d'énergie du champ de vitesse  $E(\sigma) = \langle |\hat{\mathbf{u}}_\sigma|^2 \rangle_{x,z}$ , où  $\langle \cdot \rangle_{x,z}$  est la moyenne spatiale sur le champ de mesure et  $\hat{\mathbf{u}}_\sigma$  la transformée de Fourier temporelle du champ de vitesse. Lorsque  $E(\sigma)$  est calculé sur une fenêtre de temps  $(t_0, t_0 + \Delta t)$  de quelques périodes d'excitation, nous observons l'émergence avec le temps  $t_0$  de

deux larges bosses à des fréquences plus petites que la fréquence d'excitation  $\sigma_0$ , suggérant la présence d'une instabilité sous-harmonique de l'onde primaire (Fig. 2 droite). La somme des fréquences des pics secondaires correspond à la fréquence de l'onde primaire  $\sigma_1 + \sigma_2 \simeq \sigma_0$ . Cette instabilité sous-harmonique de l'onde primaire est en pratique observée pour toutes les fréquences  $\sigma_0$  allant de  $0.65f$  à  $f$ .

Grâce à un filtrage de Hilbert [8], nous sommes capables d'extraire la structure spatiale de l'amplitude  $\mathbf{u}_o(\mathbf{x})$  et de la phase  $\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t$  de chaque onde secondaire. Nous sommes ainsi capables de montrer que les ondes secondaires sont aussi des ondes planes caractérisées par des vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . Cette structure d'onde plane suggère d'analyser cette instabilité en terme d'une résonance triadique entre l'onde primaire et les deux ondes secondaires. Une telle résonance peut être comprise grâce à la décomposition hélicoïdale de l'équation de Navier-Stokes introduite par Waleffe [10, 11]. Cette décomposition est particulièrement adaptée à l'étude des écoulements en rotation car une onde plane d'inertie a exactement la structure d'un mode hélicoïdal

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = A_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma_{\mathbf{k}} t)}, \quad (4)$$

où  $A_{\mathbf{k}}(t)$  est une amplitude complexe,  $\sigma_{\mathbf{k}}$  la fréquence,  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde et  $s_{\mathbf{k}}$  le signe de l'hélicité avec

$$\mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z|} + i s_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z|}. \quad (5)$$

Les équations d'interaction entre trois modes, i.e. trois ondes d'inertie, s'écrivent alors

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu \kappa^2 \right) A_{\mathbf{k}} = C_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{p}}^* A_{\mathbf{q}}^* e^{i(\sigma_{\mathbf{k}} + \sigma_{\mathbf{p}} + \sigma_{\mathbf{q}}) t}, \quad (6)$$

où les étoiles désignent les complexes conjugués. Les trois modes doivent vérifier la condition de résonance spatiale  $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Les coefficients d'interaction sont donnés par

$$C_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} [s_{\mathbf{q}} \kappa_{\mathbf{q}} - s_{\mathbf{p}} \kappa_{\mathbf{p}}] \left( \mathbf{h}_{s_{\mathbf{p}}}^*(\mathbf{p}) \times \mathbf{h}_{s_{\mathbf{q}}}^*(\mathbf{q}) \right) \cdot \mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}^*(\mathbf{k}). \quad (7)$$

Une permutation circulaire de  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  dans l'équation (6) donne les deux autres équations d'interaction.

Comme dans l'équation (6) et ses deux permutations les coefficients  $A_{\mathbf{r}}(t)$  sont à comprendre comme des amplitudes évoluant lentement par rapport à la période des ondes  $2\pi/\sigma_{\mathbf{r}}$ , une résonance temporelle est nécessaire pour que le coefficient  $A_{\mathbf{r}}$  du terme de gauche soit non nul. En réindexant par 0, 1, 2 les trois ondes  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$ , la condition de résonance complète s'écrit donc

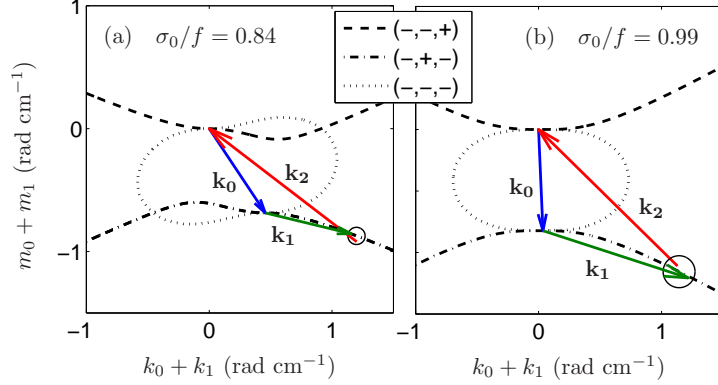
$$\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = 0. \quad (8)$$

Dans la suite, nous considérons que seule l'onde primaire, indexée 0, est présente initialement dans le système ( $A_{1,2}(0) = 0$ ). En introduisant la relation de dispersion des ondes d'inertie dans le problème, la condition de résonance devient

$$s_0 \frac{m_0}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}} + s_1 \frac{m_1}{\sqrt{k_1^2 + m_1^2}} - s_2 \frac{m_0 + m_1}{\sqrt{(k_0 + k_1)^2 + (m_0 + m_1)^2}} = 0. \quad (9)$$

Pour une onde primaire donnée,  $(s_0, k_0, m_0)$ , la solution de ce système pour chaque combinaison de signe  $(s_1, s_2)$  est une courbe dans le plan  $(k_1, m_1)$  (Fig. 3).

Dans la figure 3, les prédictions de la théorie de la résonance triadique sont comparées avec les vecteurs d'ondes secondaires  $\mathbf{k}_1 = (k_1, m_1)$  et  $\mathbf{k}_2 = (k_2, m_2)$  mesurés expérimentalement. Les vecteurs d'ondes mesurés forment un triangle fermé tel que  $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$ , vérifiant ainsi la condition de résonance spatiale, et la position du vecteur  $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1$  correspond bien à une des solutions résonantes. Pour tous les angles d'onde primaire étudiés, les ondes secondaires ont systématiquement des vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}_{1,2}$  plus horizontaux que  $\mathbf{k}_0$  comme on peut le voir sur la figure 3. Cette propriété illustre la tendance naturelle des écoulements en rotation aux transferts d'énergie vers les modes lents quasi-2D. Si ce processus est mis en cascade, l'énergie se concentre finalement dans les vecteurs d'ondes presque horizontaux, correspondant à l'état ultime de la turbulence en rotation invariante le long de l'axe de rotation [6, 7].



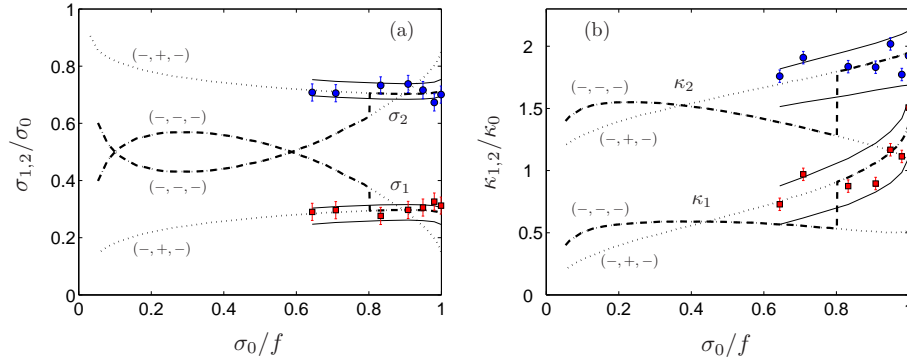
**Figure 3.** Courbes de résonance pour une onde primaire (a) [ $s_0 = -1, \sigma_0 = 0.84f, \kappa_0 = 0.82 \text{ rad cm}^{-1}$ ] et (b) [ $s_0 = -1, \sigma_0 = 0.99f, \kappa_0 = 0.82 \text{ rad cm}^{-1}$ ]. Les courbes représentent les positions de  $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 = (k_0 + k_1, m_0 + m_1)$  satisfaisant l'équation (9). Les vecteurs d'ondes mesurés expérimentalement sont représentés avec des flèches. Le cercle correspond à la prédiction théorique obtenue à partir du critère de taux de croissance maximum.

#### 4 Sélection de la triade la plus instable

Pour prédire univoquement la triade résonante effectivement sélectionnée, nous devons ajouter à l'équation (9) une condition de maximisation du taux de croissance de l'instabilité. En repartant de l'équation (6), nous pouvons prédire une croissance exponentielle de l'amplitude des ondes secondaires aux temps courts avec le taux de croissance

$$\gamma = -\frac{\nu}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \sqrt{\frac{\nu^2}{4}(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2 + C_1 C_2 |A_0|^2}. \quad (10)$$

Dans la figure 3, nous représentons par un cercle le couple de vecteurs d'onde  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  qui maximise le taux de croissance  $\gamma$  de l'instabilité parmi tous ceux résonants. Les mesures expérimentales se révèlent être en très bon accord avec cette prédiction théorique.



**Figure 4.** Fréquences  $\sigma_{1,2}/\sigma_0$  (a) et nombres d'ondes  $\kappa_{1,2}/\kappa_0$  (b) des ondes secondaires en fonction de la fréquence de l'onde primaire  $\sigma_0/f$ . Les cercles et les carrés pleins représentent les mesures expérimentales. Les prédictions théoriques sont représentées par les lignes tiretées épaisses (selon le critère de taux de croissance maximal absolu) et par les lignes pointillées (selon le critère de taux de croissance maximal relatif aux résonances de types  $(-, -, -)$  et  $(-, +, -)$ ).

En Fig. 4, nous représentons les fréquences d'ondes secondaires  $\sigma_{1,2}$  et les nombres d'ondes  $\kappa_{1,2}$  prédits théoriquement en fonction de la fréquence de l'onde primaire  $\sigma_0/f \in [0, 1]$ . Les lignes pointillées

correspondent aux prédictions pour les résonances de types  $(-, -, -)$  et  $(-, +, -)$  alors que les lignes tiretées correspondent au critère de taux de croissance maximal absolu. Nous montrons aussi les données expérimentales qui présentent un accord quantitatif avec la théorie pour la branche de type  $(-, +, -)$ . Il n'est cependant pas clair pourquoi la branche  $(-, +, -)$  est sélectionnée pour  $\sigma_0/f < 0.79$  alors que la théorie prédit que la branche  $(-, -, -)$  devrait être la plus instable. Il est possible que la taille finie de l'onde primaire (4 longueurs d'ondes seulement) empêche la sélection des ondes secondaires de vecteurs d'ondes trop faibles et donc de la branche  $(-, -, -)$ .

## 5 Discussion

Dans la limite des faibles nombres de Rossby  $Ro = U/\Omega L$ , où  $U$  et  $L$  sont respectivement les échelles caractéristiques de vitesse et de longueur, la turbulence en rotation peut être décrite comme la superposition d'ondes d'inertie en interaction faible selon le mécanisme de résonance triadique [12, 13]. L'instabilité paramétrique d'une onde d'inertie décrite dans ce travail peut alors être vue comme le mécanisme élémentaire des transferts d'énergie entre échelles en turbulence en rotation. Comme nous l'avons vu, ces transferts anisotropes ont lieu à la fois en échelle et en direction. Le transfert « angulaire » d'énergie est toujours dirigé vers des vecteurs d'ondes plus horizontaux fournissant un mécanisme clair selon lequel les modes lents quasi-2D peuvent être excités [5]. En revanche, la nature des transferts d'énergie par triade résonante en terme de nombres d'ondes — i.e. vers les grandes ou les petites échelles — dépend de l'amplitude de l'onde instable considérée et de la viscosité. En effet, les ondes d'amplitude grande devant  $\nu\kappa_0$  sont instables au profit d'ondes de grands nombres d'ondes, conduisant à une cascade directe d'énergie, alors que celles d'amplitude faible devant  $\nu\kappa_0$  se déstabilisent au profit de grandes longueurs d'ondes, résultant en une cascade inverse. Le bilan de cette compétition entre cascade directe et inverse d'énergie en turbulence en rotation reste aujourd'hui un problème fondamental ouvert.

## Références

1. H. GREENSPAN, *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridge University Press, London (1968).
2. J. Lighthill, *Waves in Fluids*, Cambridge University Press, London (1978).
3. O. M. PHILLIPS, Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves, *Phys. Fluids*, **6**, 513 (1963).
4. G. BORDES, F. MOISY, T. DAUXOIS & P.-P. CORTET, Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid, *Phys. Fluids*, **24**, 014105 (2012).
5. L. M. SMITH & F. WALEFFE, Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating, three-dimensional turbulence, *Phys. Fluids*, **11**, 1608 (1999).
6. P. SAGAUT & C. CAMBON, *Homogeneous turbulence dynamics*, Cambridge University Press, London (2008).
7. C. LAMRIBEN, P.-P. CORTET & F. MOISY, Direct Measurements of Anisotropic Energy Transfers in a Rotating Turbulence Experiment, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 024503 (2011).
8. M. MERCIER, N. GARNIER & T. DAUXOIS, Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform, *Phys. Fluids*, **20**, 0866015 (2008).
9. M. MERCIER, D. MARTINAND, M. MATHUR, L. GOSTIAUX, T. PEACOCK & T. DAUXOIS, New wave generation, *J. Fluid Mech.*, **657**, 310 (2010).
10. F. WALEFFE, The nature of triad interactions in homogeneous turbulence, *Physics of Fluids A*, **4**, 350 (1992).
11. F. WALEFFE, Inertial transfers in the helical decomposition, *Phys. Fluids A*, **5**, 577 (1993).
12. S. GALTIER, Weak inertial-wave turbulence theory, *Phys. Rev. E*, **68**, 015301 (2003).
13. C. CAMBON, R. RUBINSTEIN & F. S. GODEFERD, Advances in wave turbulence : rapidly rotating flows, *New J. Phys.*, **6**, 73 (2004).