

# Théorie de l'anharmonicité des phénomènes périodiques non-linéaires

Patrick Hanusse

Centre de Recherche Paul Pacal, CNRS-Université de Bordeaux, Avenue A. Schweitzer, 33600, Pessac  
hanusse@crpp-bordeaux.cnrs.fr

**Résumé.** Nous présentons une nouvelle théorie de l'anharmonicité des phénomènes périodiques non-linéaires basée sur une description de la dynamique de phase. De nouveaux outils mathématiques sont développés, introduisant une véritable « trigonométrie non-linéaire ». De nouvelles grandeurs mesurables qui caractérisent la distance à l'harmonicité et la classe morphologique du comportement sont introduites. Elles suffisent à décrire de façon précise et pertinente des signaux même extrêmement anharmoniques et portent un sens physique clair et universel qui exprime la signature dynamique ou structurelle du système physique qui a produit ce signal. Ces résultats constituent une percée majeure dans la description des phénomènes périodiques du monde physique depuis les travaux de Joseph Fourier.

**Abstract.** We present a new theory of the anharmonicity of nonlinear periodic phenomena based on the description of the phase dynamics. New mathematical tools are introduced leading to a genuine « nonlinear trigonometry ». New nonlinear quantities are defined which measure the distance to harmonicity and the morphological class of the behaviour. They allow a precise and relevant description of any signal however anharmonic, and provide a clear and universal physical meaning, a true signature of the system that produces such a signal. This is a major breakthrough in the description of periodic phenomena since the work of Joseph Fourier.

## 1 Introduction

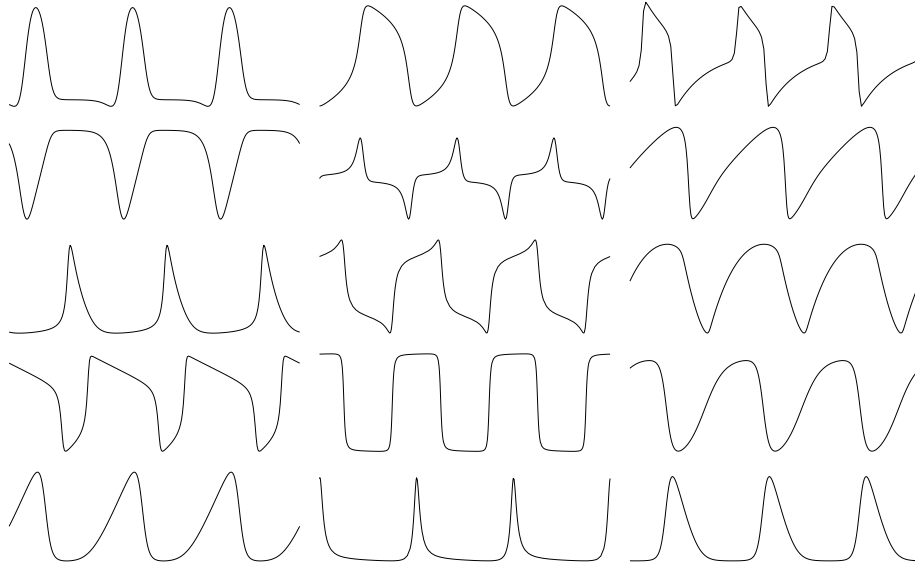
Les phénomènes périodiques non-linéaires sont une des manifestations les plus répandues du monde physique sans que l'on ait jusque là vraiment trouvé une vision unifiée de la morphologie de ces signaux qui condense dans quelques concepts et grandeurs mesurables associées l'essentiel de leurs propriétés communes. On imagine que l'on dispose d'une série temporelle, unique observation disponible du phénomène. Comment la caractériser, sachant qu'un grande variété de formes sont observables (Fig. 1).

Au delà de période et amplitude, on s'en remet à la description de Fourier pour une représentation que l'on voudrait précise mais que l'on sait qualitativement déficiente dans le cas de signaux hautement anharmoniques (phénomène de Gibbs). Une description quantitativement précise requiert un nombre de modes parfois très élevé. La quantité d'information nécessaire est clairement sans rapport avec la relative simplicité morphologique observée. On dispose donc d'une représentation mathématiquement bien définie mais qui ne dit rien du sens physique du phénomène, lequel devrait pouvoir être exprimé de manière compacte, par quelques mesures seulement, signature de sa pertinence.

Considérant des signaux périodiques "simples" (ayant un seul maximum et minimum par période) du type de ceux présentés Fig. 1, nous cherchons à définir des paramètres morphologiques universels donc à élaborer un théorie générique de l'anharmonicité.

## 2 L'apparition de l'anharmonicité

Comment l'harmonicité est-elle perdue ? Une théorie de l'anharmonicité doit d'abord répondre à cette question. Il est assez évident qu'une manifestation périodique reflète la dynamique ou la structure interne du système qui la produit et il est donc nécessaire de partir d'une situation où apparaît génériquement un phénomène oscillant. On supposera que toute manifestation périodique "émane" d'une telle situation, quand bien même ce point de bifurcation peut ne pas être concrètement atteint dans le système considéré.



**Figure 1.** Quelques morphologies typiques de signaux périodiques non-linéaires ou anharmoniques

La théorie des systèmes dynamiques nous donne clairement une réponse [1]. La bifurcation de Hopf [2] représente cette référence générique par laquelle une oscillation harmonique apparaît, mais conduit ultérieurement à une oscillation non-linéaire [3]. Tout ceci est bien connu mais que peut-on en retirer de nouveau ? Au voisinage de la bifurcation, la dynamique peut être décrite par une forme normale simple, ici exprimée en amplitude et phase  $(\rho, \phi) : \dot{\rho} = \lambda\rho - \rho^3, \dot{\phi} = \omega$ . Elle présente une symétrie rotationnelle qui exprime le caractère harmonique de l'oscillation. Nous supposons donc que toute déviation à l'anharmonicité résultera d'un "déploiement de symétrie", ou ensemble des brisures progressives de symétrie. Des travaux anciens nous avez mis déjà sur cette piste avec profit [4,5].

### 3 Oscillations anharmoniques

Sans entrer dans les détails du cheminement et des justifications qui nous amènent à ce qui suit, rappelons simplement que nous ne cherchons pas à décrire le système dynamique lui-même, objet de la modélisation spécifique de phénomène étudié. Nous observons une oscillation, stable par définition, d'amplitude donnée, et nous supposons que le déploiement de symétrie peut être entièrement exprimé dans la phase.

Alors, tout signal périodique « simple »  $2\pi$ -périodique (ayant un seul maximum et minimum par période) peut s'écrire

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(\Phi(t)) \quad (1)$$

où  $\Phi(t)$  est une fonction monotone croissante de  $t$ , et  $\Phi(t) - t$  est  $2\pi$ -périodique dans  $[0, 2\pi]$ . La dynamique de phase est décrite de la manière suivante

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{F}(\Phi) \quad (2)$$

La phase  $\Phi$ , qui n'est pas la phase  $\phi$  de la forme normale présentée plus haut, définit l'état interne du système et la fonction  $\mathcal{F}$  décrit complètement les propriétés d'anharmonicité du signal. Sa structure et sa complexification progressive nous renseigne sur les propriétés non-linéaires du système.

#### 4 Première brisure de symétrie

Lorsque que l'oscillation est harmonique, le fonction  $\mathcal{F}$  est linéaire. La perte de linéarité représente l'apparition de l'anharmonicité. La première brisure de symétrie est définie par un axe de symétrie de la vitesse de phase et peut être exprimée par la forme suivant de la fonction  $\mathcal{F}$  qui représente la forme la plus simple d'anharmonicité

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1 + r^2 + 2 r \cos(\Phi)}{1 - r^2} \quad (3)$$

avec  $r$  dans  $[0, 1[$ . Elle présente une symétrie de réflexion par rapport à l'axe  $\Phi = 0$ . Nous parlons de symétrie d'ordre 1. Le paramètre  $r$  dans  $[0, 1[$  mesure l'amplitude de la brisure. L'harmonicité est atteinte pour  $r = 0$  et pour  $r = 1$  l'anharmonicité devient infinie. Au delà le système devient excitable (note : ici par construction le période est normalisée à  $2\pi$  ; dans un système réel quand  $r$  tend vers 1 la période tend vers l'infini).

La solution ( $2\pi$ -periodique par construction) est

$$\Phi = 2 \tan^{-1}((1 + r) \sin(t/2), (1 - r) \cos(t/2)) \quad (4)$$

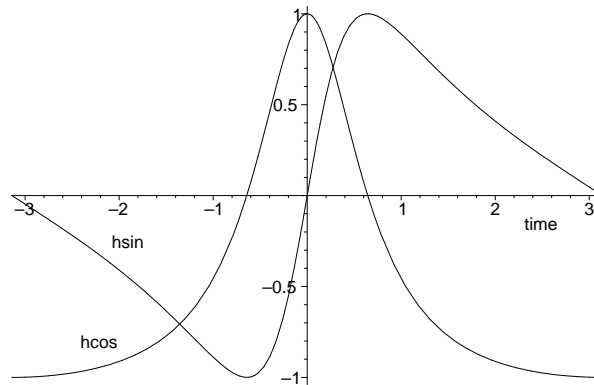
qui peut être inversée :

$$t = 2 \tan^{-1}((1 - r) \sin(\Phi)/2, (1 + r) \cos(\Phi/2)) \quad (5)$$

Nous introduisons de nouvelles *fonctions trigonométriques non-linéaires* hcos, hsin et hder comme suit

$$\begin{aligned} \text{hcos}: (t, r) &\rightarrow \frac{(1 + r^2) \cos(t) - 2 r}{1 + r^2 - 2 r \cos(t)} ; \text{hsin}: (t, r) \rightarrow \frac{(1 - r^2) \sin(t)}{1 + r^2 - 2 r \cos(t)} \\ \text{hder}: (t, r) &\rightarrow \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2 r \cos(t)} \end{aligned}$$

Ces fonctions ont de nombreuses propriétés intéressantes, que nous ne détaillerons pas ici, et qui en font



**Figure 2.** Fonctions hcos et hsin pour  $r = 0.5$  en fonction de  $t$ .

les premières d'une véritable *trigonométrie non-linéaire*.

$$\begin{aligned} \text{hsin}(t, 0) &= \sin(t), \quad \text{hcos}(t, 0) = \cos(t), \quad \text{hsin}(t, r)^2 + \text{hcos}(t, r)^2 = 1 \\ \frac{d}{dt} \text{hsin}(t, r) &= \text{hcos}(t, r) \text{hder}(t, r), \quad \frac{d}{dt} \text{hcos}(t, r) = -\text{hsin}(t, r) \text{hder}(t, r) \end{aligned}$$

Ells sont reliées aux angles  $\Phi$  and  $t$  par  $\text{hcos}(t, r) = \cos(\Phi(t, r))$ ,  $\text{hsin}(t, r) = \sin(\Phi(t, r))$ . Un signal périodique quelconque possédant cette symétrie (il faudrait dire dont le dynamique de phase ..) pourra s'exprimer comme

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(\Phi(t) - \phi_0) \quad (6)$$

où  $\phi_0$  définit l'orientation de l'axe de symétrie. En développant on obtient l'expression de générale suivante

$$x(t) = x_0 + a_1 \text{hcos}(t, r) + b_1 \text{hsin}(t, r) \quad (7)$$

L'angle  $\phi_0$  définit dont « le point de vue » de l'observation sur une dynamique interne dont la non-linéarité est mesurée par  $r$ . Selon la valeur de  $\phi_0$ , à  $r$  fixé, la morphologie du signal varie continument d'une forme « hcos » à une forme « hsin ». On voit là une propriété importante résultant de la non-linéarité : *une translation en phase n'est pas équivalente à une translation en temps*, comme c'est le cas dans le domaine linéaire. A contrario, ce résultat permet de regrouper des morphologies apparemment fort différentes dans une même classe d'équivalence de comportement (voir une illustration plus loin).

## 5 Deuxième brisure de symétrie

De la même manière, un deuxième axe de symétrie peut être introduit, orthogonal au premier, conduisant à la dynamique de phase suivante (symétrie d'ordre 2)

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1 + r^2 - 2r \cos(2\Phi)}{1 - r^2} \quad (8)$$

dont la solution est

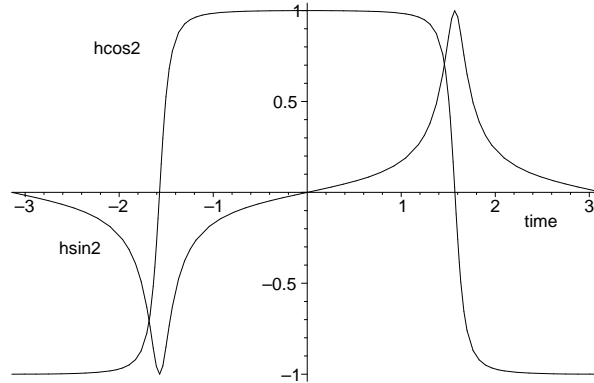
$$\Phi = \tan^{-1}((1 - r) \sin(t), (1 + r) \cos(t))$$

De façon similaire à ce qui est indiqué plus haut, nous introduisons alors les nouvelles fonctions trigonométriques suivantes (Fig. 3)

$$\text{hcos2}: (t, r) \rightarrow \frac{(1 + r) \cos(t)}{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cos(2t)}}, \quad \text{hsin2}: (t, r) \rightarrow \frac{(1 - r) \sin(t)}{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cos(2t)}}$$

et comme précédemment, un signal quelconque ayant cette symétrie pourra être exprimé comme

$$x(t) = x_0 + a_2 \text{hcos2}(t, r) + b_2 \text{hsin2}(t, r) \quad (9)$$



**Figure 3.** Fonctions hsin2 and hcos2 pour  $r = 0.5$ .

## 6 Généralisation

Les deux situations décrites ci-dessus présentent les brisures de symétrie « pures ». La plupart des systèmes réels présentent des comportements formés d'un mélange de ces deux cas, l'un ou l'autre pouvant

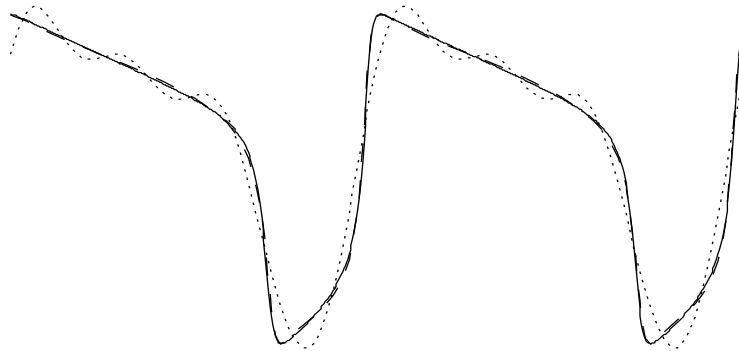
être dominant, on parlera de morphologie de type 1 ou 2 selon le cas, ou présentant des distorsions par rapport à ces situations idéales. La dynamique du système n'est généralement pas observée dans cet espace propre. Le besoin d'élargir description revient à considérer des dynamiques de phase de formes plus générales que celles présentées ci-dessus. On peut montrer que les solutions d'équations du type (3) ou (8) font partie des solutions d'une forme plus générale de  $\mathcal{F}$  dont elles ne sont qu'un cas particulier :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{F}(\Phi) = \frac{\mathcal{P}(\Phi)}{\mathcal{Q}(\Phi)} \quad (10)$$

où  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont des polynômes trigonométriques. Nous avons trouvé la solution générale de ce type d'équation et introduit une nouvelle famille de fonctions trigonométriques non-linéaires permettant d'exprimer de façon simple la solution donnant la phase en fonction de temps ou le temps en fonction de la phase, vision duale du même phénomène. Il n'est pas possible ici de décrire tous ces résultats qui sont en cours de publication. Certains détails sont disponibles ici [6].

## 7 Illustration

Nous donnons ci-dessous un exemple visuel simplement destiné à évaluer la capacité de cette théorie à représenter avec précision et simplicité une série temporelle typique (Fig. 4).



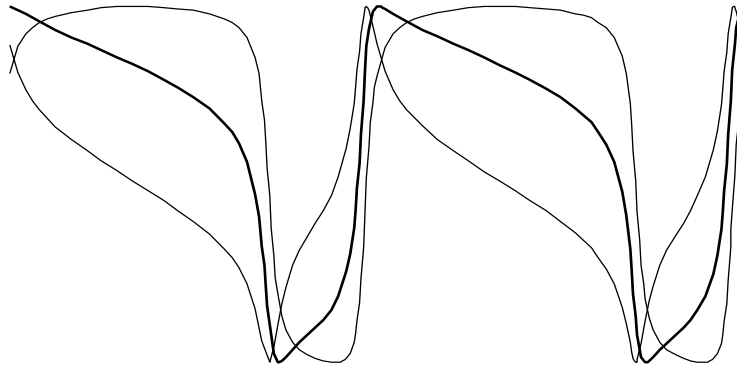
**Figure 4.** Une série temporelle (ligne continue) présentant une morphologie de type 2 (de tendance carrée) et sa représentation d'après la phase décrite par l'équation 11 (ligne en tirets, à peine distincte du signal) et sa représentation de Fourier à 4 modes (pointillés).

La forme de la fonction de phase est donnée par l'expression qui suit, dans laquelle la fonction  $x\sin$ , non définie ici, cela exigerait d'autres développements, est de même type que celles déjà introduites. Elle contient deux termes, nombre reflétant le type morphologique, une valeur d'anharmonicité ( $r = 0.95$ ), la position des fronts et leurs contributions et l'angle d'orientation.

$$\Phi = t - 1.3 + 0.8 \, x\sin(t - 6.06, 0.85) + 0.7 \, x\sin(t - 4.43, 0.85) \quad (11)$$

Le signal est représenté simplement par  $\cos(\Phi(t))$ . La précision est remarquable, pour cette description la plus simple possible pour ce type de morphologie, alors que la représentation de Fourier à 4 modes (8 paramètres) est quantitativement et qualitativement très insuffisante. Une précision du même ordre nécessite plus d'une trentaine de paramètres, bien que les oscillations autour de la forme correcte restent encore présentes.

La figure 5 illustre l'effet d'un décalage de phase  $\phi_0$  dans  $\cos(\Phi(t) - \phi_0)$ . Comme déjà indiqué, on constate que ceci n'est pas équivalent à un décalage temporel. La morphologie change considérablement et il n'est pas si facile de reconnaître immédiatement que ces séries temporelles sont « équivalentes », au sens où elles constituent des visions sous un angle différent d'une même dynamique de phase.



**Figure 5.** Effet d'un décalage de phase sur la morphologie. Les trois formes obtenues sont « équivalentes » (même  $\Phi(t)$  à une constante près), visions différentes d'une même dynamique, selon l'orientation.

## 8 Conclusion

Tout signal périodique, aussi anharmonique soit-il, peut ainsi être décrit de manière précise par un très petit nombre de termes. La forme de  $\mathcal{F}$  nécessaire s'avère étonnamment simple. Chaque paramètre a un sens facilement compréhensible de même nature que ceux introduits dans les formes « pures » déjà vues, degré d'anharmonicité  $r$ , angle d'observation  $\phi_0$ . La pondération entre les termes exprime soit la contribution des deux formes pures, soit la localisation de la non-linéarité dans le domaine de phase (non abordé ici).

Parmi les propriétés importantes il faut citer « l'orthogonalité » des paramètres ou indépendance des différentes mesures : période, amplitude, degré d'anharmonicité, orientation, localisation. Varier l'une de ses mesures en laissant les autres fixes permet de balayer des morphologies variées qui trouvent ainsi leur lien de parenté ou d'équivalence. Le forme de la dynamique de phase décrite par  $\mathcal{F}$  s'avère aussi constituer une signature de la dynamique du système. Il est ainsi possible de savoir si le système est proche d'une bifurcation globale, de type « nœud-col » ou de type « boucle homocline », par exemple. Également remarquable est la propriété de stabilité qualitative de la représentation lorsqu'on accepte une précision réduite. Aucun artefact qualitatif, non physique, n'est observé (cf. phénomène de Gibbs dans la représentation de Fourier). La simplification obtenue ne dégrade pas le caractère anharmonique. Tout au plus élimine-t-on les distorsions morphologiquement moins significatives pour obtenir les formes plus « pures » comme celles décrites plus haut.

Il est assez clair que ces résultats, ainsi que les outils développés à cette occasion, bien plus nombreux que ceux qui sont abordés ou suggérés ici, constituent une percée majeure dans la description des phénomènes périodiques non-linéaires.

## Références

1. M. GOLUBITSKY & D. G. SCHAEFFER, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol. 1, Springer-Verlag (1985)
2. J. E. MARSDEN & M. MCCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, (1976)
3. J. GUCKENHEIMER & P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, (1983)
4. P. HANUSSE, V. PEREZ-MUÑUZURI & M. GOMEZ-GESTEIRA, Relaxation behavior and pattern formation in reaction-diffusion systems, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **4** (5), 1183-1191 (1994)
5. P. HANUSSE & M. GOMEZ-GESTEIRA, Towards a normal form for spiral waves, *Physica Scripta*, **67**, 117-120 (1996)
6. P. HANUSSE, A novel approach to anharmonicity for a wealth of applications in nonlinear science Technologies, *AIP Conference Proceedings*, **1139** (1), 303-308 (2011)