

# Dynamiques complexes de rebonds d'une goutte placée sur un bain vibré : résonances et anti-résonances

Maxime Hubert & Nicolas Vandewalle

GRASP, Institute of Physics, University of Liege, B4000 Liege, Belgium  
 maxime.hubert@ulg.ac.be

**Abstract.** We present herebelow a model for bouncing droplets consisting of two masses joined by a spring and a damper bouncing onto an oscillating plate. We analyze the dynamics through the bouncing threshold and spatio-temporal diagrams. We obtain an analytic expression for the threshold. Resonance and Anti-resonance phenomena are found and investigated. The behavior of the bouncing spring is compared to the bouncing droplet dynamics. In particular, key features of the bouncing droplet dynamics are reproduced.

## 1 Introduction

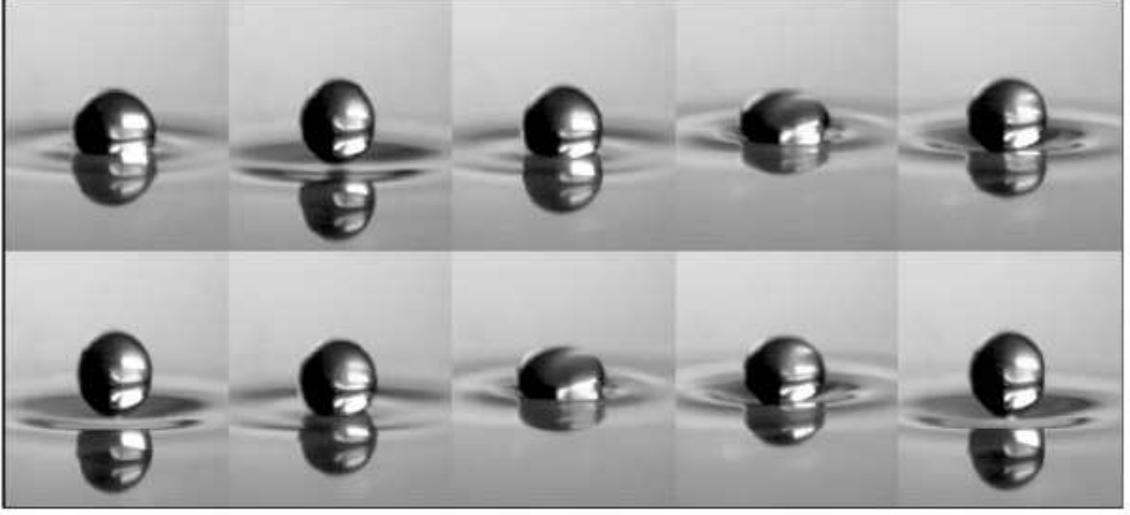
Diverses techniques ont été proposées pour empêcher la coalescence d'une goutte sur un bain de même liquide. Citons l'utilisation de molécules amphiphiles [1], l'exploitation de l'effet Marangoni [2,3] ou encore l'utilisation d'un ressaut hydraulique [4]. En 2005, Couder *et al.* ont étudié les gouttes rebondissantes [5]. Cette expérience consiste à faire vibrer verticalement la surface d'un liquide et d'y faire rebondir une goutte. Une illustration de l'expérience est donnée en figure 1.

Ces gouttes rebondissantes exhibent des phénomènes inédits. En effet, Dorbolo *et al.* [6] ont observé divers phénomènes de résonance au sein des gouttes selon l'amplitude et la fréquence du forçage appliqué. En particulier, les gouttes sont capables grâce à leurs déformations de rouler le long de la surface et de se déplacer horizontalement. Pour certaines gammes de paramètres de forçage et de gouttes [7], les gouttes deviennent des marcheurs et avancent spontanément le long de la surface du liquide vibré. Cette marche est possible grâce à la symbiose existant entre la goutte et l'onde qu'elle génère sur la surface du bain par ses impacts successifs. Les marcheurs parviennent à reproduire diverses expériences normalement réservées au monde atomique. Citons l'effet tunnel [8], la diffusion par des fentes [9] où la quantification d'orbites de révolution [10]. La compréhension complète de la dynamique de rebond d'une goutte est donc essentielle pour l'appréhension de tels phénomènes.

Le but de ce travail est de modéliser une goutte et ses déformations afin de comprendre leurs effets dans la dynamique de rebond. Nous proposons d'étudier un modèle considérant le rebond d'un ressort. Ce modèle a l'avantage de simplifier la modélisation tout en capturant l'essentiel des propriétés de la goutte rebondissante.

## 2 Définition du modèle

L'utilisation d'un tel modèle se justifie par diverses constatations expérimentales reprises dans [6] et dans [11]. En effet, une goutte, dans la limite de faibles déformations, se comporte comme un ressort amorti. Le modèle du ressort rebondissant est défini comme suit : deux masses  $m_1$  et  $m_2$  sont liées par un ressort et un amortisseur. Chacun ayant pour but de reproduire les propriétés élastiques et visqueuses de la goutte. Le ressort est de raideur  $k$  et de longueur naturelle  $L$ , l'amortisseur possède une viscosité  $\beta$ . Ce système rebondit sur un plan rigide oscillant à l'amplitude  $A$  et à la pulsation  $\omega$ . Une représentation schématique de ce modèle est donnée sur la figure 2. Cherchant à exprimer les équations du mouvement dans le référentiel du laboratoire, nous obtenons



**Figure 1.** Rebond d'une goutte sur une surface de fluide vibrée verticalement. Notons le décollage périodique de la goutte ainsi que sa déformation importante. D'après [12].

$$z_p(t) = A \cos(\omega t). \quad (1)$$

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + \beta \left( \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right) + k(z_1 - z_2 - L) + m_1 g = 0, \\ m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} - \beta \left( \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right) - k(z_1 - z_2 - L) + m_2 g = N_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

où  $z$  désigne la hauteur par rapport à la position moyenne du plan et les indices  $p$ , 1 et 2 désignent respectivement le plan, la masse 1 et la masse 2. La réaction normale due au plan est notée  $N_2$ . Définissant la pulsation naturelle du ressort comme  $\omega_0 = \sqrt{k/(m_1 + m_2)}$ , le coefficient de dissipation de l'amortisseur comme  $\xi = \beta/2\omega_0(m_1 + m_2)$  et le rapport de masse comme  $\mu = m_1/m_1 + m_2$ , nous pouvons introduire les quantités sans dimension suivantes : la fréquence réduite  $\Omega = \omega/\omega_0$ , l'accélération réduite  $\Gamma = A\omega^2/g$ , le temps réduit  $\phi = \omega t$ , la hauteur réduite  $\alpha = z/A$  et la longueur réduite  $l = L/A$ . Les équations du mouvement deviennent

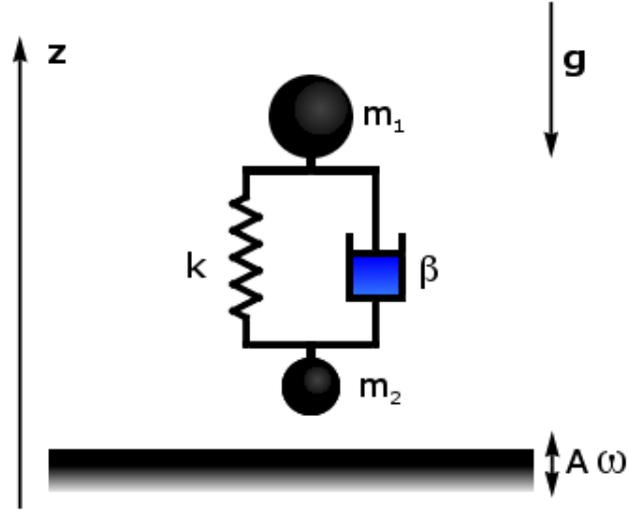
$$\alpha_p(\phi) = \cos(\phi). \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \alpha_1}{d\phi^2} + \frac{2\xi}{\mu\Omega} \left( \frac{d\alpha_1}{d\phi} - \frac{d\alpha_2}{d\phi} \right) + \frac{1}{\mu\Omega^2} (\alpha_1 - \alpha_2 - l) + \frac{1}{\Gamma} = 0, \\ \frac{d^2 \alpha_2}{d\phi^2} - \frac{2\xi}{(1-\mu)\Omega} \left( \frac{d\alpha_1}{d\phi} - \frac{d\alpha_2}{d\phi} \right) - \frac{1}{(1-\mu)\Omega^2} (\alpha_1 - \alpha_2 - l) + \frac{1}{\Gamma} = n_2(\phi), \end{cases} \quad (4)$$

où  $n_2$  correspond à la réaction normale sans dimension.

### 3 Seuil de rebond

Afin d'étudier le comportement du ressort rebondissant, il est utile de calculer la valeur minimale de l'accélération réduite  $\Gamma_{\text{th}}$  qu'il faut appliquer au plan oscillant afin de permettre au ressort de décoller. Afin d'obtenir ce seuil de rebond, partons de l'hypothèse que le ressort repose sur le plan. La masse  $m_2$  en suit donc le mouvement tandis que nous supposons que la masse  $m_1$  oscille à la fréquence du plan, avec un déphasage éventuel. Ceci nous donne comme solution



**Figure 2.** Représentation du modèle du ressort rebondissant. Deux masses  $m_1$  et  $m_2$  sont liées entre elles par un ressort de raideur  $k$  et par un amortisseur de viscosité  $\beta$ . L'objet est contraint de rebondir sur un plan rigide oscillant à amplitude  $A$  et pulsation  $\omega$ .

$$\begin{cases} \alpha_1(\phi) = \alpha' \cos(\phi + \theta), \\ \alpha_2(\phi) = \cos(\phi). \end{cases} \quad (5)$$

les paramètres  $\alpha'$  et  $\theta$  correspondent respectivement à l'amplitude et à la phase du mouvement de la masse  $m_1$ . Une première étude des équations (2) nous offre les expressions de ces deux paramètres

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\Omega)^2}{(1 - \mu\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}}, \quad (6)$$

$$\theta = -\arccos\left(\frac{(1 - \mu\Omega^2) + (2\xi\Omega)^2}{\sqrt{(1 + (2\xi\Omega)^2)((1 - \mu\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2)}}\right). \quad (7)$$

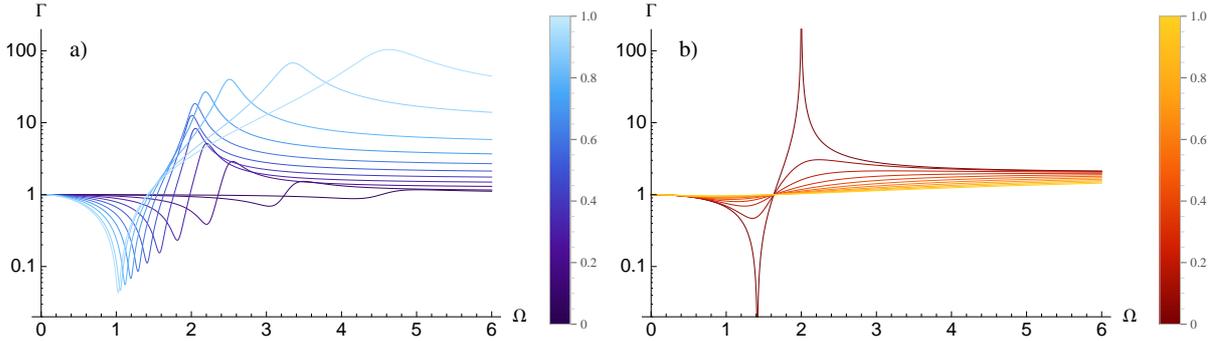
Cherchant l'instant où la réaction normale s'annule dans les équations (2), nous obtenons, après quelques manipulations, le seuil de rebond en fonction des paramètres  $\xi$  et  $\mu$

$$\Gamma_{\text{th}}(\Omega) = \sqrt{\frac{(1 - \mu\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}{(1 - \mu(1 - \mu)\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}}. \quad (8)$$

## 4 Discussion

Le seuil de rebond décrit par l'équation (8) est proposé graphiquement sur la figure 3 pour diverses valeurs du rapport en masse et du coefficient de dissipation. Nous pouvons observer l'existence d'un minimum et d'un maximum. Afin d'expliquer l'existence de ces deux extrema, nous raisonnerons à viscosité nulle. Selon l'équation (8), le minimum apparaît pour une fréquence réduite  $\Omega = 1/\sqrt{\mu}$ . Ce phénomène correspond à une résonance du ressort. En effet, si nous nous penchons sur l'équation (6), nous constatons qu'à cette fréquence, le ressort possède une élongation maximale. Dans ce cas, le plan, de par sa vibration, communique au ressort de l'énergie élastique de manière optimale. Le ressort décolle dès lors pour de

très faibles valeurs de l'accélération réduite, en particulier pour  $\Gamma < 1$ , i.e. une accélération maximale du plan inférieure à la gravité. Une illustration du mouvement à la résonance est donnée sur la diagramme spatio-temporel de la figure 4(a). Un retour sur la figure 3 nous permet de comprendre l'effet du rapport de masse et de la dissipation sur la résonance. Une viscosité croissante tend à déplacer le minimum vers les basses fréquences tout en diminuant son amplitude, tandis que le rapport de masse croissant déplace le minimum vers les hautes fréquences, toujours en diminuant son amplitude.



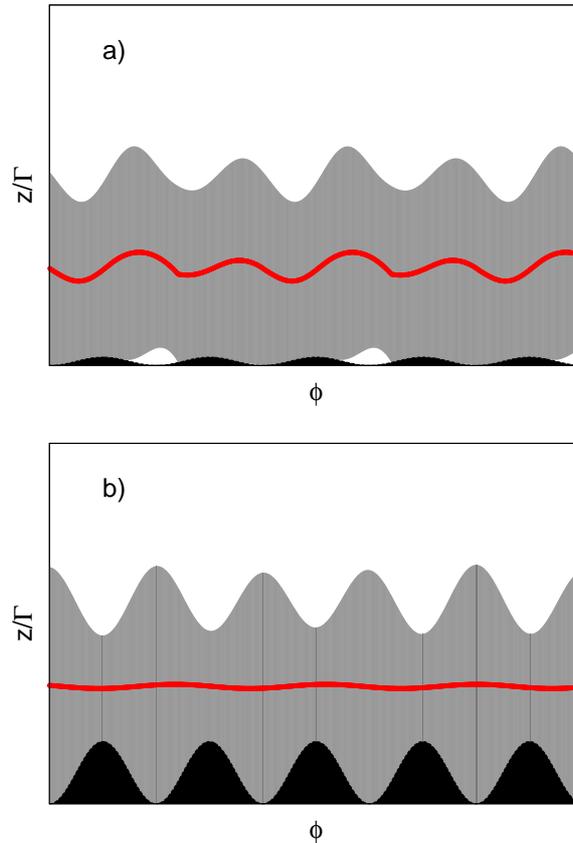
**Figure 3.** Seuil de rebond du ressort en fonction de la fréquence réduite (en échelle logarithmique). En (a), la valeur du coefficient de dissipation a été fixée à  $\xi = 0.02$  et la rapport de masse  $\mu$  a varié de 0 à 1. En (b), nous avons fixé le rapport de masse  $\mu = 0.5$  tandis que le coefficient de dissipation était libre de varier de 0 à 1. Nous pouvons constater que le rapport de masse et la dissipation ont tout deux un effet sur la position et l'amplitude des extrema.

Nous observons aussi un maximum dans la courbe de seuil de rebond. Celui-ci apparaît pour  $\Omega = 1/\sqrt{\mu(1-\mu)}$  et tend à inhiber le décollage. Afin de marquer la différence entre ce phénomène et celui de résonance, nous parlerons d'anti-résonance. La figure 3 nous permet d'appréhender le comportement du maximum d'anti-résonance en fonction du rapport de masse et de la viscosité. Une viscosité croissante déplace le maximum vers les hautes fréquences tout en atténuant son amplitude. Nous pouvons même montrer que ce maximum disparaît pour une dissipation supérieure à  $\xi_{\text{lim}} = \sqrt{\mu(\mu-1)/2\mu-4}$ . Le comportement vis-à-vis du rapport de masse est plus complexe à décrire. Le maximum se déplace vers les basses fréquences lorsque  $\mu$  augmente puis ensuite revient vers les hautes fréquences lorsque  $\mu$  excède 0.5. Le maximum gagne en amplitude lorsque  $\mu$  augmente. Nous pouvons appréhender le comportement du ressort à l'anti-résonance par une analyse de l'expression (7). Dans ce cas, toujours à viscosité nulle, nous constatons que le ressort oscille en opposition de phase avec le plan. Les deux effets en présence, l'élasticité du ressort et la propulsion par le plan, luttent donc à chaque instant l'un contre l'autre, empêchant le décollage. Le mouvement est illustré sur la figure 4(b).

Le phénomène de résonance a déjà été reporté pour les gouttes et expliqué dans la littérature [6, 13], la présence d'un maximum dans le courbe de seuil de rebond a quant à lui été observé par Dorbolo *et al.* [6] mais assimilé alors à une résonance du film d'air seul. Notre modèle amène ici une conclusion différente en présentant le maximum comme une anti-résonance au sein de la goutte.

## 5 Conclusion

Nous avons créé un modèle de ressort rebondissant capable de reproduire les effets élastiques et visqueux d'une goutte. Nous avons dérivé des équations du mouvement l'expression du seuil de rebond du ressort et sommes parvenu à isoler deux phénomènes. Le premier, au minimum de la courbe de seuil de rebond, correspond à la résonance du ressort. Le plan lui communique une grande quantité d'énergie qu'il exploite pour décoller à de faibles amplitudes d'oscillations. Ce phénomène a déjà été observé par



**Figure 4.** Diagrammes spatio-temporelle du ressort rebondissant à la résonance (a) et à l'anti-résonance (b), les oscillations du ressort sont en gris, celles du plan en noir. Le mouvement du centre de masse est indiqué en rouge. Dans chaque cas, le rapport de masse a été fixé à  $\mu = 0.5$  et le coefficient de dissipation à  $\xi = 0$ . Pour la résonance, nous avons pris  $\Gamma = 0.5$ . Nous pouvons constater que le ressort décolle déjà malgré une accélération maximale du plateau plus faible que la valeur de  $g$ . Pour l'anti-résonance, nous avons pris  $\Gamma = 8$ . Malgré l'amplitude de vibration le ressort ne décolle pas, ceci est dû à l'oscillation en opposition de phase avec le plan.

Dorbolo [6] et par Gilet [13] pour les gouttes rebondissantes. Le second phénomène, au maximum de la courbe de seuil de rebond, correspond à une anti-résonance. Le ressort ne peut décoller du plan que lorsqu'il oscille à de grandes amplitudes de forçage. Ce comportement s'explique au travers du déphasage qui existe entre les oscillations du plan et celles du ressort. Ce comportement est aussi observé pour les gouttes dans Dorbolo *et al.* [6]. Nous avons aussi étudié le comportement de ces résonances en fonction de la viscosité et du rapport de masse au sein du ressort.

Un travail futur serait d'obtenir une relation liant les paramètres du ressort aux propriétés visqueuses et élastiques d'une goutte afin de la décrire pleinement en terme de ressorts. De plus, le phénomène d'anti-résonance pourrait être utilisé comme un filtre pour les gouttes. Sachant que la fréquence d'anti-résonance dépend de la masse, et donc du diamètre, nous pourrions construire un filtre nous permettant de sélectionner une taille donnée de goutte ou bien d'en éliminer une. Cette technique, aux conséquences utiles en microfluidique, permettrait une meilleur contrôle de la taille des gouttes manipulées.

## Références

1. Y. AMAROUCHENE, G. CRISTOBAL & H. KELLAY, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 206104 (2001).

2. R. SAVINO, D. PATERNA & M. LAPPÀ, *J. Fluid Mech.*, **479**, 307 (2003).
3. R. SAVINO, F. NOTA & S. FICO, *Microgravity Sci. Technol.*, **14**, 3 (2003).
4. K. R. SREENIVAS, P. K. DE & J. H. ARAKERI, *J. Fluid Mech.*, **380**, 297 (1996).
5. Y. COUDER, E. FORT, C.-H. GAUTHIER & A. BOUDAUD, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 177801 (2005).
6. S. DORBOLO, D. TERWAGNE, N. VANDEWALLE & T. GILET, *New J. Phys.*, **10**, 113021 (2008).
7. S. PROTIÈRE, A. BOUDAUD & Y. COUDER, *J. Fluid Mech.*, **554**, 85 (2006).
8. A. EDDI, E. FORT, F. MOISY & Y. COUDER, *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 240401 (2009).
9. Y. COUDER & E. FORT, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 154101 (2006).
10. E. FORT, A. EDDI, A. BOUDAUD, J. MOUKHTAR & Y. COUDER, *PNAS*, **107**, 17515 (2010).
11. K. OKUMURA, F. CHEVY, D. RICHARD, D. QUÉRÉ & C. CLANET, *Europhys. Lett.*, **62**, 237 (2003).
12. D. TERWAGNE, *Bouncing Droplets, the role of deformations*, Ph.D. thesis, Université de Liège (2011).
13. T. GILET, D. TERWAGNE, N. VANDEWALLE & S. DORBOLO, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 167802 (2008).