

Washboard road, instabilité de tôle ondulée

Baptiste Percier¹, Sébastien Manneville¹, & Nicolas Taberlet¹

Laboratoire de Physique, Ecole Normale Supérieure de Lyon, CNRS UMR 5672, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France.

baptiste.percier@ens-lyon.fr

Résumé. Lorsque une route en sable est soumise au passage répété de véhicules, un motif de rides apparaît spontanément, un phénomène connu sous le nom de tôle ondulée ou washboard road. Nous présentons ici un modèle pour l'instabilité de tôle ondulée qui se fonde directement sur des mesures expérimentales des forces de contact agissant sur une plaque charriant du sable. En particulier, nous avons mesuré cette force dans un état stationnaire, et constaté qu'elle était simplement proportionnelle à la quantité de sable transporté. Puis, en imposant une perturbation sinusoïdale autour de cet état nous avons constaté qu'une modélisation linéaire de la force de portance permettait d'obtenir une équation d'évolution qui décrit très bien l'instabilité. Ce modèle reproduit avec fidélité l'existence d'une vitesse critique délimitant deux régimes et prédit quantitativement la longueur d'onde des rides.

Abstract. When a sand road is subjected to the repeated passages of vehicles a rippled pattern spontaneously appears. This is known as washboard road. In this paper we present a model for the washboard road instability which is based on experimental measurements of the lift force acting on a blade dragging sand. In particular, in a stationary state, we found that the force is only proportional to the amount of sand that is carried. Then, by imposing a sinusoidal perturbation, we found that a linear model for the lift lead to an equation of motion which successfully describes the instability. This model reproduces the existence of a critical velocity between two regimes and quantitatively predicts the wavelength of the pattern.

1 Introduction

Le passage répété de véhicules sur une piste en sable ou en graviers entraîne la formation de rides à la surface de la piste. Ce phénomène, dit « tôle ondulée » ou « washboard road », est à la fois très gênant et très dangereux car il provoque une perte d'adhérence du véhicule. La solution la plus couramment apportée est l'emploi d'un bulldozer pour aplanir la route. De fortes analogies existent entre la formation des rides éoliennes ou sous-marines [1,2] d'une part et l'instabilité de washboard d'autre part, même si les mécanismes de transport de grains sont différents. Afin de comprendre comment et pourquoi ces rides se forment, nous avons reproduit le phénomène à l'échelle du laboratoire [3,4,5]. Pour cela nous avons construit une piste circulaire de 5m de périmètre, remplie de sable, sur laquelle une plaque inclinée tirée avec une vitesse horizontale imposée est libre de se déplacer verticalement. Nous avons alors constaté que, si la vitesse de la plaque est suffisamment élevée, des rides apparaissent à la surface de la piste. La première conclusion est que l'instabilité n'est pas due à la présence d'amortisseur sur la voiture comme il est souvent prétendu [6,7,8,9,10,11,12]. Ainsi, si l'on souhaite créer un modèle permettant d'expliquer l'instabilité, celui-ci doit rendre compte de cette observation et faire au moins apparaître une vitesse critique. Le modèle présenté dans cet article repose sur l'application des lois de la dynamique à la plaque : $m\ddot{y} = -mg + f_l$, où m est la masse de la plaque, y sa position verticale, f_l la force de portance agissant sur la plaque et g l'accélération de la pesanteur. Ainsi, l'élément clé d'un tel modèle est l'expression de la force de portance. Dans une première partie nous présentons des mesures de f_l en régime stationnaire [13], puis en appliquant une perturbation sinusoïdale autour de l'état stationnaire nous accédons à une expression de f_l qui permet de modéliser l'instabilité de washboard.

2 Mesure de la force de portance

2.1 État stationnaire

Nous avons tout d'abord mesuré la force de portance dans un état stationnaire lorsqu'une plaque fixe de PVC de largeur $L=15$ cm et inclinée d'un angle de 45° (Fig. 1) charrie du sable de densité $\rho=2.4$ g.cm $^{-3}$. Cette « charrue » parcourt la piste à vitesse constante et ajustable entre 0.1 et 2.0 m.s $^{-1}$. L'altitude de la plaque est imposée avec une précision de $5\mu\text{m}$ et ajustée de sorte que la plaque charrie une quantité de sable comprise entre 0 et 2 kg. Il est très important de noter ici que la charrue ne fait que lisser la piste. Puisqu'elle est fixée verticalement, l'instabilité de washboard ne peut pas se développer. La force de contact verticale f_l entre la charrue et le sable est mesurée à l'aide de deux capteurs de force (Testwell KD40S) montés en parallèle. En utilisant deux capteurs, on rigidifie l'ensemble et on réduit le couple agissant sur chacun d'eux. Lorsque que la charrue entraîne du sable, celui-ci prend une forme de prisme à base triangulaire. Nous avons mesuré la longueur l (Fig. 1) d'un des côtés de ce triangle à l'aide d'un télémètre laser (optoCNDT 1302) avec une précision de 0.2 mm. D'autres expériences ont été réalisées avec une nappe laser qui permet le calcul du profil complet. Nous avons alors observé que dans une vaste gamme de vitesses, ce profil reste triangulaire avec un angle d'avalanche dynamique constant, $\theta \simeq 35^\circ$. Nous pouvons alors calculer la masse de sable transportée en connaissant les angles α et θ ainsi que la longueur l et la compacité, mesurée à $\phi = 0.55$.

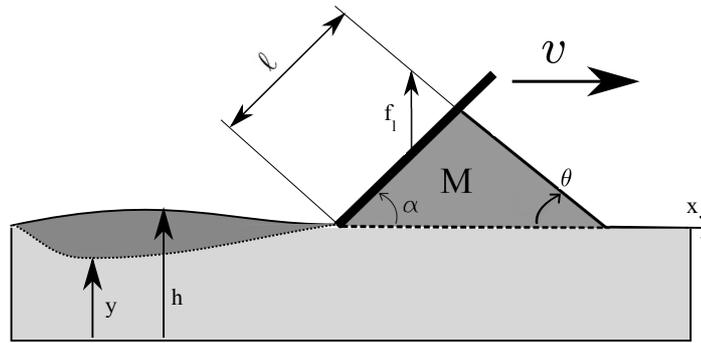


Figure 1. On appelle y l'altitude de la plaque, h la hauteur de la piste.

Nos mesures ont montré qu'il est possible d'exprimer M à partir de la trajectoire de la plaque $y(t)$ et de l'altitude de la piste avant le passage de la plaque, $h(x)$ (Fig. 1). Nous avons constaté que la plaque récolte tout le sable contenu entre la trajectoire $y(t)$ et le profil initial de la piste $h(x = vt)$. Ainsi la masse transportée s'écrit :

$$M = \rho L v \phi \int_0^t (h(vt') - y(t')) dt'. \quad (1)$$

Nous avons constaté que si l'on trace la force de portance en fonction de la quantité de sable charriée pour différentes vitesses, toutes les courbes se superposent sur une seule courbe maîtresse (Fig. 2). Ainsi, en première approximation $f_l = \mu M g$, où le coefficient μ est indépendant de la vitesse ($\mu = 0.56$).

2.2 Réponse spectrale

La simple relation $f_l = \mu M g$ n'est pas suffisante pour développer une analyse de stabilité linéaire, car la mesure de portance a été faite dans un régime stationnaire, à altitude constante et sur un lit plat. Il manque donc des termes dans l'expression de la portance. On peut tout d'abord supposer que la force de portance est sensible à $\frac{dM}{dt}$. En effet, une quantité de sable initialement au repos doit acquérir une certaine quantité de mouvement quand elle devient entraînée par la charrue. De plus, comme il est plus difficile d'enfoncer la charrue dans le sable ($\dot{y} < 0$) que de la soulever ($\dot{y} > 0$), la portance devrait ainsi

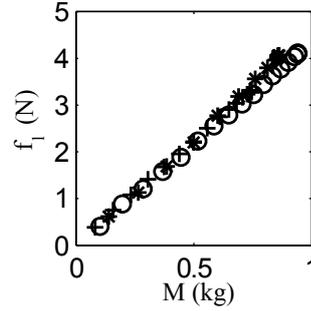


Figure 2. Force de portance f_l en fonction de la masse de sable transporté M pour un angle de 45° et les vitesses suivantes : + $v=0.1 \text{ m.s}^{-1}$, * $v=0.5 \text{ m.s}^{-1}$, o $v=1 \text{ m.s}^{-1}$

dépendre de \dot{y} . On peut enfin faire l'hypothèse que h et y jouent des rôles symétriques. Ainsi, au premier ordre linéaire on obtient l'expression suivante pour la force de portance :

$$f_l = \mu M g + \beta \dot{M} - \alpha (\dot{y} - \dot{h}) \quad (2)$$

où α and β sont deux coefficients positifs et $\dot{h} = v \partial_x h$. L'équation du mouvement de la plaque est donc :

$$m \ddot{y} = \mu g M + \beta \dot{M} - \alpha (\dot{y} - \dot{h}) - m g \quad (3)$$

Comme f_l est décrit par un système linéaire, un bon moyen de l'étudier est de travailler dans le domaine complexe et de mesurer sa réponse à des excitations sinusoïdales. La première étape consiste alors à forcer des oscillations à la plaque, à la pulsation ω , tout en passant sur un profil initial plat. La seconde étape sera de passer à altitude constante sur une piste comprenant déjà un motif de rides sinusoïdales.

Oscillations sur un profil plat La portance est mesurée en forçant les oscillations à différentes fréquences de la plaque sur un profil plat, ce qui correspond alors à mesurer la fonction de transfert du système. Ainsi, en utilisant la notation complexe, si $\underline{h} = 0$ et $\underline{y} = A \exp(j\omega t)$, où A est l'amplitude des oscillations et ω leur pulsation, l'équation (2) devient :

$$\underline{f}_l = \left(A \frac{j}{\omega} \mu \rho L \phi v g - A \rho L \phi v \beta - A j \omega \alpha \right) \exp(j\omega t) \quad (4)$$

On peut alors définir la fonction de transfert \underline{H} par $\underline{H} = \frac{\underline{f}_l}{\underline{y}}$, qui s'apparente à la fonction de transfert d'un filtre coupe-bande du second ordre. Le gain $|\underline{H}|$ et la phase ψ de cette fonction de transfert sont alors :

$$\begin{cases} |\underline{H}| = \sqrt{(\beta \rho L \phi v)^2 + \left(\frac{\mu \rho L \phi v g}{\omega} - \omega \alpha \right)^2} \\ \psi = \pi - \arctan \left(\frac{\frac{\mu \rho L \phi v g}{\omega} - \omega \alpha}{\beta \rho L \phi v} \right) \end{cases} \quad (5)$$

Nous avons donc mesuré $|\underline{H}|$ et ψ expérimentalement en utilisant le même dispositif que précédemment mais en faisant osciller la plaque à l'aide d'une platine de translation pilotée par un moteur pas à pas. Nous avons toutefois ajouté une deuxième plaque à une altitude constante en amont de la première, ce qui permet de lisser la piste. Ainsi la première plaque rencontre toujours un profil initial plat. La figure (3)

montre le diagramme de Bode du système. On remarque que le gain et la phase sont en bon accord avec l'expression (5).

Si l'on impose une pulsation ω_c telle que $\psi(\omega_c) = \pi$ alors la partie imaginaire de \underline{H} est nulle, d'où $\alpha = \frac{\mu\rho L\phi v g}{\omega_c^2}$. Expérimentalement, nous avons trouvé que ω_c dépendait à la fois de M et de v . Pour M fixée, ω_c est une fonction affine de v , alors qu'à v fixée ω_c est proportionnelle à \sqrt{M} . Ainsi, nous pouvons donner une formule pour α (Figs 3c et 3d) :

$$\alpha = a \frac{v}{(v_0 + v)^2} M, \quad (6)$$

avec, pour notre système, $v_0=0.1 \text{ m s}^{-1}$ et $a=60 \text{ m s}^{-3}$. Il est ensuite possible d'obtenir β en mesurant le minimum de $|\underline{H}|$ (atteint en ω_c), $\beta = \frac{H(\omega_c)}{\rho L \phi v}$. Expérimentalement, nous n'avons pas trouvé de nette dépendance de β vis à vis de M ou de v (Figs 3e et 3f). Dans la suite, nous supposons que β est constant et vaut : $\beta=2.7 \text{ m s}^{-1}$. Ainsi, la dépendance de f_l vis-à-vis de y est parfaitement connue. Dans l'équation (2) nous supposons que y et h jouent des rôles symétriques dans f_l , ce que l'on se propose de montrer dans la suite.

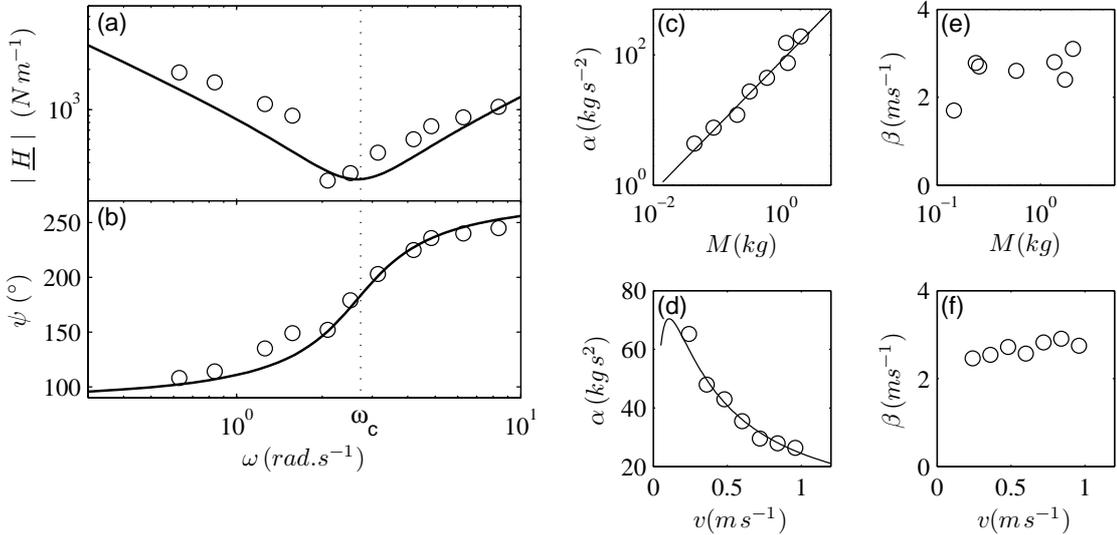


Figure 3. (a) (b) Diagramme de Bode du système lorsque la plaque oscille sur une piste plane. La vitesse de la plaque est de 0.7 m.s^{-1} et elle transporte une masse $M=1 \text{ kg}$. Les courbes en trait plein correspondent au gain et à la phase donnés par l'expression (5) et ajustée à l'aide des coefficients α et β . (c) Coefficient α en fonction de M pour $v=0.7 \text{ m.s}^{-1}$. (d) Coefficient α en fonction de v pour $M=1 \text{ kg}$. (e) Coefficient β en fonction de M pour $v=0.7 \text{ m.s}^{-1}$. (f) Coefficient β en fonction de v pour $M=1 \text{ kg}$.

2.3 Altitude constante sur un lit sinusoïdal

Pour comprendre l'influence de h , nous créons désormais un lit sinusoïdal à l'aide de la première plaque et mesurons la portance subie par la charrue dont l'altitude est gardée fixe comme au paragraphe 2.1. En notation complexe, on a alors : $\underline{h} = A \exp(j\omega t)$ et $\underline{y} = 0$, et on peut définir une fonction de transfert de la même façon que précédemment, $\underline{H}' = \frac{f_l}{y}$. Le gain et la phase de \underline{H}' sont représentés Fig. 4. Nous constatons que là aussi, la fonction de transfert peut être correctement modélisée par l'expression donnée dans l'équation (4) avec les mêmes expressions des coefficients α et β . Ces mesures nous permettent de valider la modélisation de la portance faite dans l'équation (2). Tous les coefficients de l'équation (2) et leur dépendance en v et M étant désormais connus, une analyse de stabilité linéaire peut être développée.

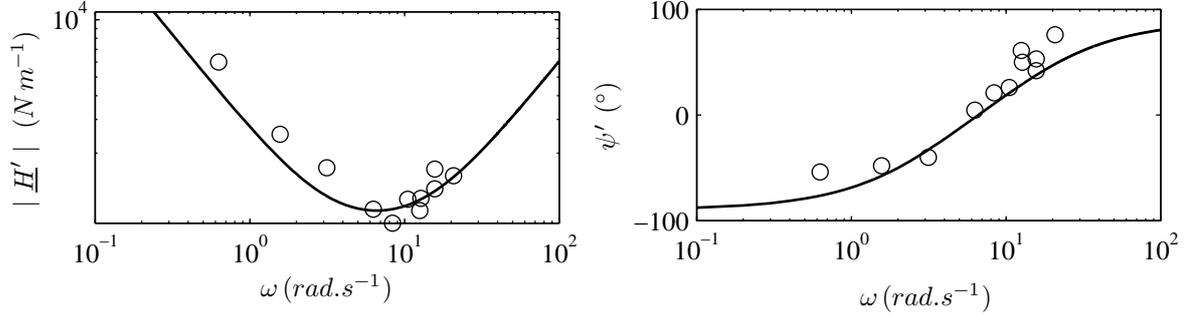


Figure 4. Diagramme de Bode du système lorsque la plaque passe à altitude constante sur un profil sinusoïdal, pour $v=1.5 \text{ m.s}^{-1}$ et $M = 1 \text{ kg}$. Les courbes en trait plein correspondent au gain et à la phase calculés à partir du modèle et des valeurs des coefficients α et β trouvés précédemment. Il est important de noter qu'il n'y a ici aucun paramètre ajustable.

3 Modélisation de l'instabilité de washboard

Comme mentionné précédemment, le passage répété de véhicules est à l'origine de la tôle ondulée. Il faut ainsi itérer l'équation (3). Alors, si y_n et h_n sont respectivement la trajectoire de la plaque et le profil de la piste au $n^{\text{ième}}$ passage, il faut trouver la relation qui existe entre h_n et y_{n-1} . Nos mesures ont montré que $h_n = k y_{n-1}$, où le coefficient k dépend a priori de ω (on s'attend d'ailleurs à ce que $h_n/y_n = 1$ pour $\omega=0$). Cependant, dans la gamme de paramètres que nous avons explorée, nous avons toujours mesuré $k \simeq 0.8$. De futures mesures seront réalisées afin de connaître plus précisément le rapport entre h_n et y_{n-1} et de mieux l'expliquer.

En notant $\underline{y}_n = \exp(\sigma - j\varphi) \underline{y}_{n-1}$, où σ est le taux de croissance des rides, en dérivant l'équation (3) par rapport au temps on arrive facilement à la relation de dispersion suivante :

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(\gamma - \delta\omega^2)^2 + \epsilon^2\omega^2}{(\gamma - \delta\omega^2)^2 + (\epsilon\omega - \omega^3)^2} \right] + \ln k, \quad (7)$$

avec $\gamma = \mu g L \rho \phi v / m$, $\delta = \alpha / m$ et $\epsilon = \beta L \rho \phi v / m$. On constate ainsi que ω_{th} ne possède des valeurs positives que si v est suffisamment grand (Fig. 5a). Cela signifie que l'instabilité se développe si la vitesse dépasse une certaine vitesse critique. Ce modèle reproduit donc bien l'une des caractéristiques principale de l'instabilité. De plus, la longueur d'onde du mode le plus instable ($\lambda_{th} = \frac{2\pi v}{\omega_{th}}$), peut être calculée et correspond parfaitement à la longueur d'onde (λ) des rides mesurée dans l'expérience (Fig. 5b).

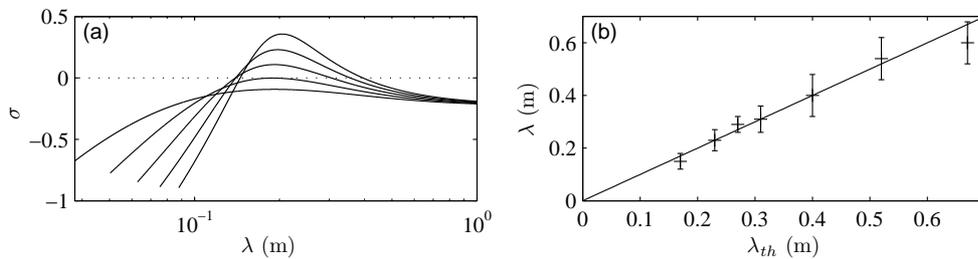


Figure 5. (a) Taux de croissance, σ , en fonction de la longueur d'onde λ pour différentes vitesses. (b) Longueur d'onde des rides mesurées expérimentalement en fonction de la longueur d'onde la plus instable calculée à partir du modèle basé sur les paramètres α et β mesurés au paragraphe 2.2

On remarque sur figure 5a que pour des faibles vitesses σ est toujours négatif. En augmentant la vitesse, on voit apparaître une large bande de longueurs d'onde instables, ce qui est en accord avec l'expérience, puisque initialement on observe la présence de rides de différentes longueurs d'onde. Ces rides évoluent ensuite pour donner un motif plus régulier avec une seule longueur de ride. Le fait que l'on puisse prédire exactement cette longueur d'onde est un gros succès pour notre modèle. De futures expériences seront également menées pour confronter les vitesses critiques expérimentale et théorique.

4 Conclusion

Nous avons présenté ici un modèle inédit pour l'instabilité de tôle ondulée qui s'appuie sur des mesures de la force de portance ressentie par le « véhicule ». Nous avons tout d'abord montré que dans un régime stationnaire la force de portance est simplement proportionnelle à la masse de sable transportée par l'objet. Puis, en mesurant la réponse à une perturbation sinusoïdale autour de cet état, nous avons pu vérifier qu'en première approximation la portance peut être modélisée par un système linéaire du deuxième ordre. En reliant la trajectoire de la plaque à sa trace sur la piste, on peut intégrer les équations du mouvement. On obtient alors un système qui présente une bifurcation pilotée par la vitesse horizontale de la plaque. En plus de prédire l'existence d'un seuil en vitesse pour le washboard, notre modèle fournit la longueur d'onde exacte des rides. Il reste toutefois à expliquer l'origine physique de la dépendance du coefficient α avec M et v (équation (6)), à mieux comprendre l'origine physique du coefficient k reliant h_n à y_{n-1} et à confronter la vitesse critique du modèle à la vitesse critique expérimentale. L'étape suivante sera d'explorer le régime non-linéaire qui fait saturer l'amplitude des rides.

Références

1. A. VALANCE & V. LANGLOIS, Ripple formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow, *European Physical Journal B*, **43**, 283-294 (2005)
2. K. KROY, G. SAUERMAN & H. J. HERRMANN, Minimal model for sand dunes, *Physical Review Letters* **88**, 054301 (2002)
3. K. B. MATHER, Why do roads corrugate?, *Scientific American*, **208**, 128-136 (1963)
4. N. TABERLET, S. W. MORRIS & J. N. MCELWAINE, Washboard road : The dynamics of granular ripples formed by rolling wheels, *Physical Review Letters*, **99**, 068003 (2007)
5. A.-F. BITBOL, N. TABERLET, S. W. MORRIS & J. N. MCELWAINE, Scaling and dynamics of washboard roads, *Physical Review E*, **79**, 061308 (2009)
6. D. C. MAYS & B. A. FAYBISHENKO, Washboards in unpaved highways as a complex dynamic system *Complexity*, **5** (6), 51-60 (2000)
7. J. A. BOTH, D. C. HONG & D. A. KURTZE, Corrugation of roads, *Physica A*, **301** (1-4), 545-559 (2001)
8. Y. SATO, A. MATSUMOTO & K. KNOTHE, Review on rail corrugation studies, *Wear*, **253**, (1-2), 130-139 (2002)
9. P. MEEHAN & W. DANIEL, Effects of wheel passing frequency on wear-type corrugations, *Wear*, **265**, (9-10), 1202-1211 (2008)
10. P. BELLETTE, P. MEEHAN & W. DANIEL, Effects of variable pass speed on wear-type corrugation growth, *Journal of Sound and Vibration*, **314** (3-5), 616-634 (2008)
11. N. HOFFMANN & M. MISOL, On the role of varying normal load and of randomly distributed relative velocities in the wavelength selection process of wear-pattern generation, *International Journal of Solids and Structures*, **44** Issues 25-26, 15 December 2007, Pages 8718-8734 (2007)
12. D. A. KURTZE, & J. A. BOTH, The genesis of washboard roads, *International Journal of Modern Physics B*, **15** (24-25), 3344-3346 (2001)
13. B. PERCIER, S. MANNEVILLE, J.N. MCELWAINE, S.W. MORRIS, N. TABERLET, Lift and drag forces on an inclined plow moving over a granular surface, *Physical Review E*, **84**, 051302 (2011)