

# Inéquivalence d'ensemble d'états stationnaires turbulents

Brice Saint-Michel<sup>1</sup>, Bérengère Dubrulle<sup>1</sup>, Guillaume Mancel<sup>1</sup>, Vincent Padilla<sup>1</sup>, Cécile Wiertel<sup>1</sup> & François Daviaud<sup>1</sup>

CEA Saclay, Orme des Merisiers, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex  
brice.saint-michel@cea.fr

**Résumé.** Nous présentons dans cet article les résultats concernant l'influence du forçage sur des états stationnaires turbulents d'un écoulement tourbillonnaire de *von Kármán*. Nous avons découvert que changer le forçage permettait de stabiliser (ou déstabiliser) certains états quasi stationnaires du système. De même, il est possible d'observer une dynamique rappelant les systèmes de basse dimensionnalité sous certaines conditions. Cette sensibilité à la nature du forçage pourrait être un analogue de l'inéquivalence d'ensemble observée en thermodynamique dans des systèmes possédant des interactions à longue portée. Nous caractérisons la pertinence d'une telle analogie en utilisant les grandeurs globales et les champs de vitesse issus de la PIV mises en place sur notre expérience.

**Abstract.** We report in this article the influence of the forcing on the turbulent steady states found to exist in the von Kármán swirling flow. We find that the forcing nature influences the nature of the stability of quasi-steady states of the system and reveal dynamics similar to low-dimensional systems. This sensitivity might be linked to ensemble inequivalence, seen in long-range interacting systems in thermodynamics. We try to characterise the relevance of this analogy using mechanical measurements and PIV velocity fields.

## 1 Introduction

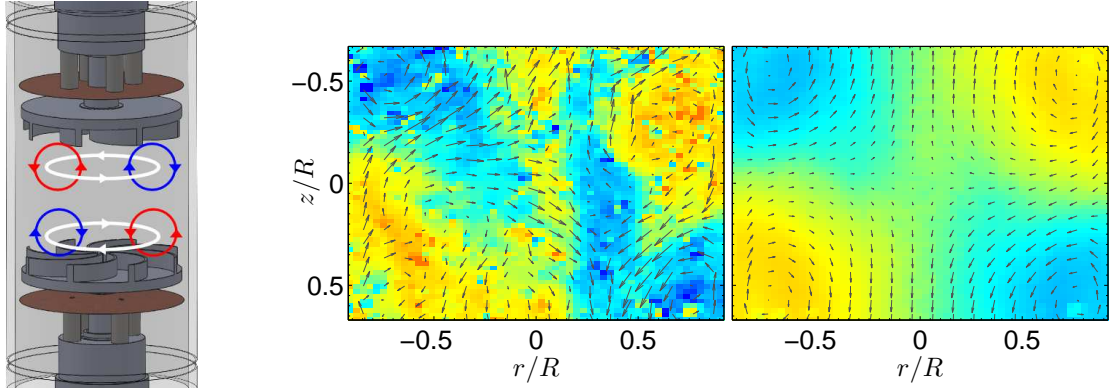
Les systèmes thermodynamiques possédant des interactions à longue portée possèdent une propriété étonnante d'*inéquivalence d'ensemble* : parfois, les solutions stables dans l'ensemble micro-canonique, où l'énergie  $E$  du système est fixée, ne le sont pas dans l'ensemble canonique, où cette fois-ci la température  $T$  du système est fixée. Cela est généralement dû à la forme de l'entropie dans l'ensemble micro-canonique [1]. Ces résultats, valables à l'équilibre, ont été récemment étendus au cas hors-équilibre [2] qui fait apparaître certaines caractéristiques bien particulières, comme l'existence de *susceptibilités négatives* dans l'ensemble micro-canonique lorsque les deux ensembles ne sont pas équivalents.

Les écoulements turbulents sont généralement considérés comme possédant de telles interactions à longue portée [3, 4] et sont par essence hors-équilibre : un écoulement turbulent *stationnaire* nécessite en effet d'injecter de l'énergie au système, qui sera ensuite dissipée par la viscosité du fluide. Pourtant, les principaux résultats du domaine [5, 6] indiquent une universalité de la turbulence. Par conséquent, les mécanismes d'injection d'énergie ne sont pas censés avoir d'influence sur les propriétés de tels écoulements, ce qui a été en partie confirmé par une étude comparative locale des deux modes d'injection pour une expérience à pales droites [7]. Nous allons voir que cette affirmation n'est pas tout à fait exacte, tout du moins pour les grandes échelles d'un écoulement turbulent entraîné par des *pales courbes*.

## 2 Présentation du montage expérimental

### 2.1 Géométrie

Nous disposons au laboratoire d'un écoulement de von Kármán turbulent, identique à celui de Cortet *et. al.* [8]. Il se compose d'un cylindre de rayon  $R = 100$  mm rempli de fluide, mis en mouvement par deux turbines de rayon  $R_t = 0.925 R$  munies de pales courbes de hauteur  $0.2R$ , qui se font face et qui tournent en contra-rotation (voir figure 1). La distance entre les turbines, en bord de pale, vaut  $1.4R$ . Les turbines possédant des pales courbes, nous tenons à signaler que les deux sens de rotation ne sont pas équivalents. Le sens choisi dans cet article attaque le fluide avec le côté *concave* des pales.



**Figure 1.** À gauche, montage expérimental utilisé, avec le cylindre rempli de fluide et ses deux turbines. En couleurs, topologie globale de l'écoulement : chaque turbine entraîne le fluide à sa proximité en rotation, et chaque turbine pompe le fluide aux  $R$  proches de 0 pour le réinjecter aux grands  $R$  dans le cœur de l'écoulement. Au centre, écoulement instantané fourni par la PIV stéréoscopique installée sur l'expérience, pour une expérience fréquence de rotation des turbines identique. Les flèches représentent la vitesse dans le plan lumineux, et les fausses couleurs la vitesse normale à ce plan. Le champ de vitesses possède des valeurs élevées, est très désordonné et ne présente aucune symétrie particulière. À droite, champ de vitesses moyen masqué derrière l'écoulement instantané, où les symétries (voir 2.3) sont restaurées.

## 2.2 Entraînement

Chacune des turbines est entraînée par un moteur synchrone d'une puissance de 1.8 kW. Ces derniers disposent de deux modes de fonctionnement : le premier consiste à imposer les *vitesses* notées  $f_1$  et  $f_2$  des turbines, et le second consiste à imposer les *couples*  $C_1$  et  $C_2$  transmis aux arbres mécaniques, qui seront transmis aux turbines moyennant des frottements liés aux étanchéités dynamiques mises en place. Ces grandeurs sont mesurées à la fois par les variateurs des moteurs et par des couplemètres qui nous donnent une estimation plus précise de la valeur des couples exercés sur les turbines. Les quantités  $f$  et  $C$  sont des grandeurs conjuguées : d'une part, dans nos expériences, nous nous attacherons soit à regarder les fluctuations de  $f$  quand  $C$  est imposé, ou celles de  $C$  quand  $f$  est imposée. D'autre part, nous pouvons voir que le produit de ces deux grandeurs définit directement la puissance injectée dans notre expérience :

$$\mathcal{P} = C \times (2\pi f) \quad (1)$$

Cela pourrait alors être un analogue des grandeurs conjuguées énergie  $E$  et température  $T$  à l'équilibre thermodynamique.

## 2.3 Symétries

Notre expérience possède deux symétries principales. La première est l'axisymétrie. Celle-ci n'est rigoureusement respectée que dans le cas où les disques sont lisses. Nous disposons de turbines munies de pales. Toutefois, nous considérerons dans la suite de cet article que celles-ci, une fois en rotation, ne brisent plus l'invariance par rotation. Une deuxième symétrie intervient si nous supposons les vitesses  $f_1$  et  $f_2$  identiques : en effet, retourner l'expérience (comme un sablier) laisse dans ce cas l'expérience invariante. Nous nommerons cette symétrie supplémentaire  $\mathcal{R}_\pi$  symétrie. Elle a pour effet de changer  $f_1$  en  $f_2$  et  $C_1$  en  $C_2$  dans le cas où ces derniers seraient distincts. Il est alors commode de redéfinir de nouvelles grandeurs se transformant astucieusement sous cette symétrie :

$$\theta = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}; \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}. \quad (3)$$

Nous notons que  $\mathcal{R}_\pi(\theta) = -\theta$  et  $\mathcal{R}_\pi(\gamma) = -\gamma$ . Ce sont principalement ces « distances » à la symétrie que nous examinerons dans la suite : les expériences de commande en vitesse nous permettent d'imposer  $\theta$ , tandis que les expériences de commande en couple fixeront la valeur de  $\gamma$ .

## 2.4 Mesure du champ de vitesse

Notre expérience nous permet aussi de vérifier le respect de nos symétries à l'intérieur même du fluide : en effet, nous disposons d'une imagerie par vélocimétrie de particules stéréoscopique (S-PIV). En effectuant des photographies de particules diffusantes illuminées dans l'écoulement à des instants très rapprochés, il est possible d'identifier le déplacement des particules et de remonter au champ des vitesses dans l'écoulement. De cette manière, nous pouvons obtenir un champ de vitesses échantillonné à 15 Hz avec une résolution de 2 mm environ. Les principes généraux de la turbulence nous indiquent tous les champs de vitesses instantanés observés sont alors *a priori* indépendants. Un de ces principes, déduit d'approximations liées aux systèmes dynamiques, veut que les symétries des montages expérimentaux, brisées par les écoulements instantanés turbulents soient *statistiquement* restaurées si nous effectuons une moyenne d'« ensemble » sur les réalisations possibles des écoulements turbulents [6]. Nous avons effectué de tels tests en commande en vitesse à  $f_1 = f_2$  sur la figure 1 (à droite), où le principe semble effectivement respecté. Aux plus grandes échelles,  $C_1$  et  $C_2$  semblent fluctuer de manière stationnaire autour de valeurs moyennes  $C_{1,m}$  et  $C_{2,m}$ . Nous disposons donc d'une deuxième méthode pour caractériser un tel état, nommé ( $s$ ) dans la suite de cet article.

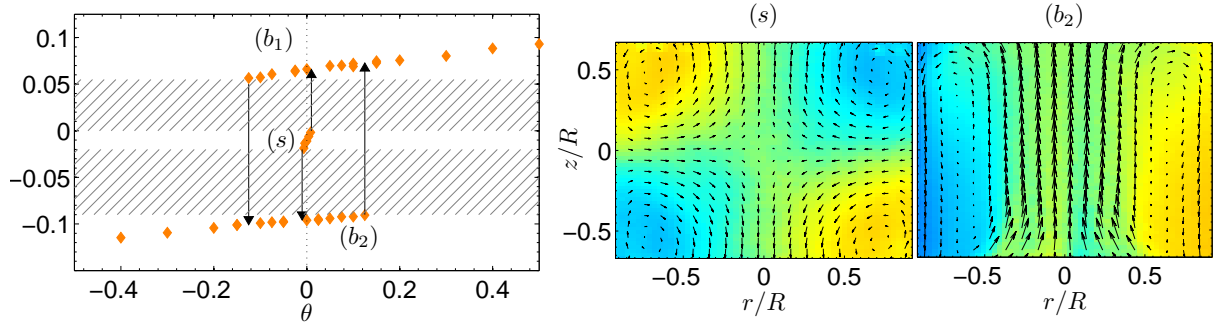
## 3 Comparaison des deux types de commande

### 3.1 Commande en vitesse : un cycle d'hystérésis

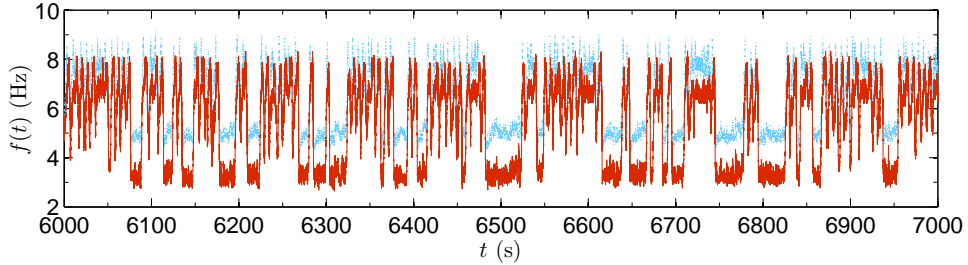
Nous avons indiqué dans la section précédente la restauration au sens statistique des symétrie du montage. En commande en vitesse, cela est vrai à une condition : le système, depuis son état au repos, ne doit jamais quitter la condition  $\theta = 0$ . Cela implique de démarrer les deux turbines en même temps. Si nous démarrons les deux turbines à des instants distincts, nous observons un champ de vitesses très différent : ( $b$ ), stationnaire, antisymétrique selon  $\mathcal{R}_\pi$  (il existe donc  $(b_1) = -(b_2)$ ), axisymétrique, qui est visible sur la figure 2. Ce sont des états dits *bifurqués*. Ils viennent briser sur toutes nos mesures la  $\mathcal{R}_\pi$  symétrie. Si nous effectuons un balayage en  $\theta$ , nous observons que les états ( $b_1$ ) et ( $b_2$ ) forment en fait des *branches* continues ( $b_1$ ) et ( $b_2$ ), *fortement* hystérétiques, pour lesquelles  $\gamma \neq 0$ . L'état ( $s$ ) génère quant à lui une petite branche ( $s$ ), quasiment centrée sur  $\gamma = 0$ , qui est marginalement stable : il n'est plus possible de récupérer cet état une fois quitté. Cette situation est résumée à gauche de la figure 2. Nous pouvons remarquer que cette figure respecte globalement la  $\mathcal{R}_\pi$  symétrie : la légère dissymétrie provient d'une difficulté d'effectuer des calibrations réellement symétriques. L'important hystérésis observé implique quant à lui une *zone interdite*, soit une plage de valeurs de  $\gamma$  qui ne sont jamais accessibles en commande en vitesse.

### 3.2 Commande en couple

En commande en couple, nous pouvons imposer n'importe quelle valeur de  $\gamma$ . Nous avons dans un premier temps vérifié que les états atteints en commande en vitesse étaient aussi observés en commande en couple, pour les mêmes valeurs de  $(\theta, \gamma)$ . Nous nous sommes placés ensuite aux  $\gamma$  correspondant aux valeurs de la zone interdite. Nous observons alors, de manière surprenante, que le système perd sa stationnarité. En effet, en nous éloignant progressivement de la branche ( $s$ ), les vitesses des turbines  $f_1$  et  $f_2$  présentent d'abord rarement, puis de plus en plus régulièrement, des fluctuations très importantes qui durent environ une seconde, appelées *excursions*, où les vitesses se croisent : la turbine la plus forcée ralentit brusquement et la turbine la moins forcée accélère. Si nous continuons d'augmenter  $\gamma$ , ces fluctuations grandissent, puis saturent. Le système est alors multi-stable et semble transiter de manière aléatoire entre plusieurs états préférentiels (voir figure 3). Pour des valeurs plus grandes encore de  $\gamma$ , il semblerait que



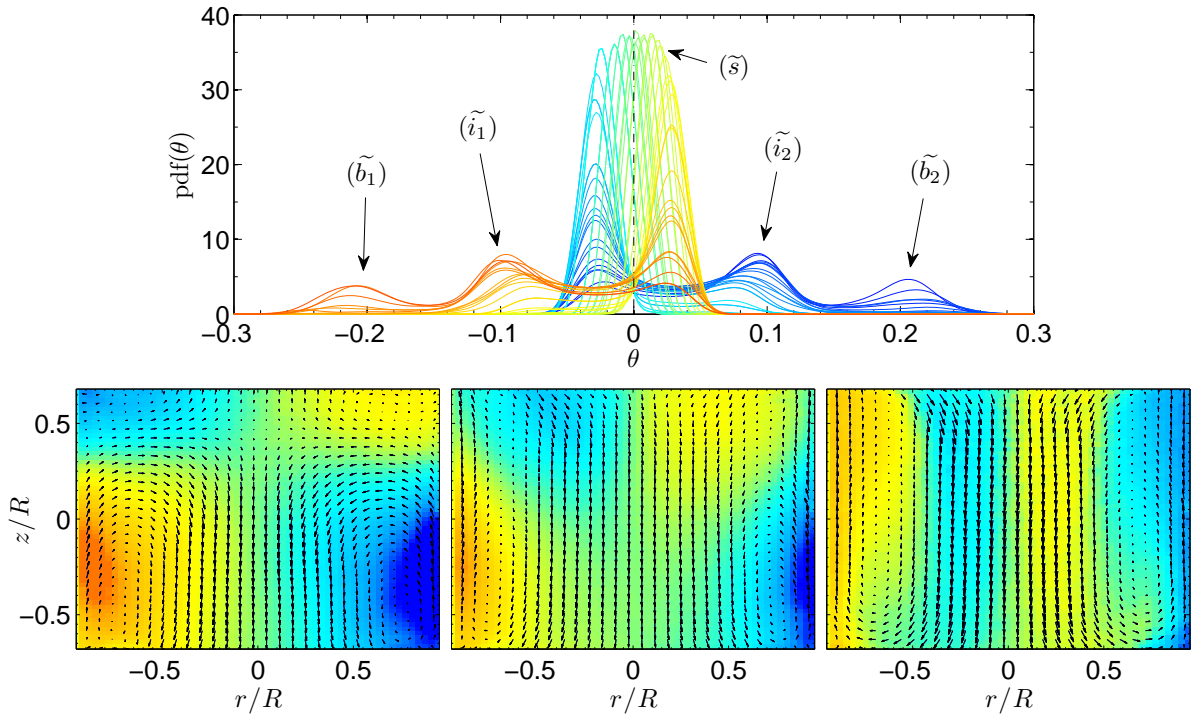
**Figure 2.** À gauche : cycle d'hystérésis de la commande en vitesse. ( $\diamond$ ) : états stationnaires moyens observés pour les différentes valeurs de  $\theta$ , organisés selon les trois branches ( $b_1$ ), ( $b_2$ ) et ( $s$ ). Les flèches représentent les bifurcations autorisées entre ces états, fortement sous-critiques dans le cas ( $b_1$ )  $\leftrightarrow$  ( $b_2$ ). Les hachures représentent la plage de valeurs de  $\gamma$  inaccessibles. À droite, rappel de l'état ( $s$ ) et état bifurqué ( $b_2$ ) à  $\theta = 0$  : la taille des flèches de l'état ( $b_2$ ) a été divisée par 2 pour une meilleure lisibilité.



**Figure 3.** Signaux de vitesse des turbines haut (—) et bas (···) pour une expérience à l'intérieur du cycle d'hystérésis, proche de la branche ( $b_2$ ). Les vitesses ne sont clairement pas stationnaires et semblent venir se bloquer sur plusieurs valeurs préférentielles pour diverses échelles de temps, toutes plus grandes que les temps caractéristiques de l'expérience.

l'état lent de la figure 2 devienne prépondérant, et le système n'explore plus que rarement les états les plus rapides. Ces événements rares disparaissent lorsque nous rejoignons la branche stationnaire ( $b_1$ ) ou ( $b_2$ ). Il est alors possible d'examiner la distribution de  $\theta(t)$  afin de regarder le nombre d'états préférentiellement atteints. La figure 4 consigne les formes de cette distribution pour diverses valeurs de  $\gamma$ . Pour des valeurs de  $\gamma$  proches de 0 (en vert), nous n'observons globalement qu'un seul pic, nommé ( $\tilde{s}$ ), proche de  $\theta = 0$ , qui se déplace lentement vers la droite à mesure que  $\gamma$  augmente. En se déplaçant, ce pic semble également perdre de l'importance au profit de deux nouveaux pics, qui apparaissent aux  $\theta \leq 0$ . Le premier de ces pics à prendre de l'importance est appelé ( $\tilde{i}_1$ ) et se situe aux alentours de  $\theta = -0.1$ . Le second, nommé ( $\tilde{b}_1$ ), ne prendra quant à lui de l'importance que pour les plus fortes valeurs de  $\gamma$ , au détriment de ( $\tilde{s}$ ) et ( $\tilde{i}_1$ ). Pour de plus grandes valeurs de  $\gamma$  (non montrées), ce pic ( $\tilde{b}_1$ ) devient l'unique pic de la distribution de  $\theta$  et la position de ce dernier vient rejoindre les valeurs de la branche stationnaire ( $b_1$ ). Bien entendu, ce scénario se produit exactement de la même manière (à la  $\mathcal{R}_\pi$  symétrie près) si nous diminuons  $\gamma$  au lieu de l'augmenter, et nous rejoindrons progressivement la branche ( $b_2$ ).

Nous pouvons nous demander si les états ( $\tilde{i}_1$ ) et ( $\tilde{i}_2$ ) sont effectivement bien des états quasi stationnaires qui ne résultent pas uniquement d'un nombre important de passages entre les états ( $\tilde{s}$ ) et ( $\tilde{b}$ ). Nous pouvons vérifier cela sur la figure 2 : en effet, on y observe plusieurs occurrences d'un état où les deux vitesses sont élevées et semblent stationnaires sur une durée pouvant dépasser 10 s, correspondant à ( $\tilde{i}_1$ ), qui est donc bien quasi-stationnaire. Il est d'ailleurs possible de le caractériser, ainsi que les états ( $\tilde{s}$ ) et ( $\tilde{b}_1$ ) en utilisant des moyennes conditionnelles (voir figure 4) pour s'assurer que ces états sont bien distincts.



**Figure 4.** En haut, Distribution de  $\theta(t)$  pour des expériences de commande en couple s'échelonnant entre  $\gamma = -0.08$  et  $\gamma = 0.045$ . La couleur des lignes représente la valeur de  $\gamma$ . En bas, Moyennes conditionnelles de champs de PIV pour une expérience de commande en couple à  $\gamma \approx -0.09$ . À gauche, état  $(\tilde{s})$ . Au centre, état  $(\tilde{i}_1)$ . À droite, état  $(\tilde{b}_1)$ .

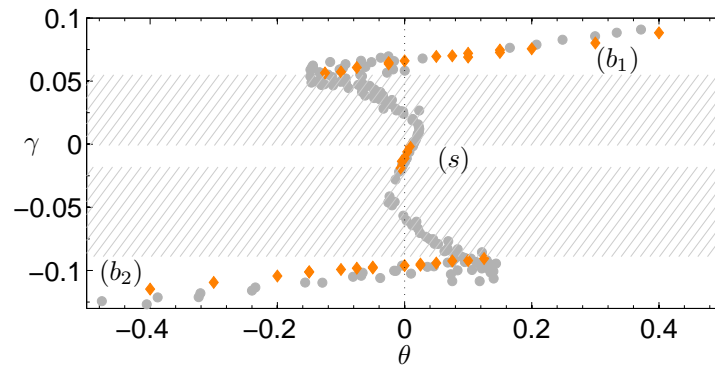
#### 4 Discussion : inéquivalence d'ensemble ?

Les résultats de Ninno et Fanelli [2], principalement numériques, indiquent que les résultats de l'ensemble micro-canonique et canonique différeront *uniquement* dans les zones de susceptibilité négative. Dans ce cas, il existera plus d'états stationnaires dans l'ensemble micro-canonique, où il est possible d'atteindre toutes les solutions stables issues de l'ensemble canonique.

Il est possible de reporter tous nos résultats de commande en couple sur le cycle d'hystérésis de la figure 5, afin de bien voir le comportement global du système dans la zone interdite, qui disparaît en commande en couple. Sur la quasi-totalité de celle-ci, le  $\theta$  moyen varie dans le sens contraire de  $\gamma$ , soit, des *susceptibilités négatives*. Il est alors possible que la commande en couple soit un analogue de l'étude d'un système dans l'ensemble micro-canonique, tandis que la commande en vitesse le soit dans l'ensemble canonique. Cela nous semble d'autant plus intuitif que  $f$  et  $C$  semblent posséder une forme de conjugaison, qui n'est pas sans rappeler la conjugaison de l'entropie  $S$  et celle de la température  $T$  dans les expressions d'énergie libre.

#### 5 Conclusion

Nous avons rapporté plusieurs résultats dans cet article. Le premier résultat vient poser la question de l'universalité de la turbulence : en effet, nous avons vu ici que les mécanismes d'injection d'énergie ont un effet important sur la dynamique aux grandes échelles d'un écoulement turbulent, qui peut se traduire par un fort hystérésis ou une instationnarité. Nous avons de plus effectué une analogie avec les systèmes possédant des interactions à longue portée, dont l'effet du changement d'ensemble thermodynamique,



**Figure 5.** Cycle d'hystérésis de la figure 2 et points associés en commande en couple. (●), moyenne de  $\theta$  pour chaque expérience de commande en couple. Il est possible de voir une large gamme de susceptibilités négatives, correspondant aux situations de pics multiples de la distribution de  $\theta$  de la figure 4.

en particulier l'apparition de susceptibilités négatives, n'est pas sans rappeler l'effet du changement de forçage dans notre écoulement.

## Références

1. J. BARRÉ *et al.*, Out-of-equilibrium statistical ensemble inequivalence, *Europhy. Lett.*, **87**, 030601 (2001).
2. G. DE NINNO *et al.*, Inequivalence of ensembles in a system with long-range interactions, *Phys. Rev. Lett.*, **8**, 20002 (2012).
3. P. A. DAVIDSON, Long-range interactions in turbulence and the energy decay problem, *Phil. Trans. Roy. Soc. A : Math., Phys. Eng. Sc.*, **369**, 796–810 (2010).
4. J. MILLER *et al.*, Statistical mechanics of Euler equations in two dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 2137–2140 (1990).
5. A. KOLMOGOROV, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds' numbers, *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, **30**, 301–305 (1941).
6. U. FRISCH, *Turbulence : the legacy of AN Kolmogorov*, Cambridge University Press (1995).
7. J.-H. TITON *et al.*, The statistics of power injected in a closed turbulent flow : Constant torque forcing versus constant velocity forcing, *Phys. Fluids*, **15**, 625–640 (2003).
8. P.-P. CORTET *et al.*, Susceptibility divergence, phase transition and multistability of a highly turbulent closed flow, *J. Stat. Mech. : Theory Exp.*, **2011**, P07012 (2011).
9. O. CADOT, *Étude des structures de basse pression dans la turbulence développée*, Université Paris 7 (1995).
10. S. T. BRAMWELL *et al.*, Universality of rare fluctuations in turbulence and critical phenomena, *Nature*, **396**, 552–554 (1998).
11. F. RAVELET *et al.*, Multistability and Memory Effect in a Highly Turbulent Flow : Experimental Evidence for a Global Bifurcation, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 164501 (2004).
12. B. SAINT-MICHEL *et al.*, Forcing-dependent stability of steady turbulent states, *en préparation*.