

Turbulence anisotrope des pseudo-ondes d'Alfvén en deux dimensions

Natalia Tronko¹, Sébastien Galtier², & Sergey Nazarenko³

¹ Centre for Fusion Space and Astrophysics, University of Warwick, Gibbet Hill road, CV4 7AL Coventry, UK

² Institut d'Astrophysique Spatiale UMR 8617 - Université Paris-Sud Bât. 121, F-91405 Orsay Cedex, France

³ Department of Mathematics, University of Warwick, Gibbet Hill road, CV4 7AL Coventry, UK

nathalie.tronko@gmail.com

Résumé. Nous présentons une analyse des équations cinétiques de turbulence faible obtenues dans le cadre de la magnétohydrodynamique en deux dimensions (2D). Contrairement au cas tridimensionnel, les pseudo-ondes d'Alfvén jouent un rôle central dans la dynamique non-linéaire. On montre que le régime 2D se caractérise par une absence d'universalité avec une turbulence de nature nonlocale pour laquelle il n'existe aucune solution exacte en loi de puissance pour le spectre d'énergie. Notre exposé est illustré par des simulations numériques des équations cinétiques de turbulence faible.

Abstract. We present an analysis of the kinetic equations of weak turbulence obtained in the framework of two-dimensional (2D) magnetohydrodynamics. Contrary to the three-dimensional case, the pseudo-Alfvén waves play a central role in the nonlinear dynamics. We show that the 2D regime is characterized by an absence of universality with a non-local turbulence for which there is no power law exact solution for the energy spectrum. Our presentation is illustrated with numerical simulations of the kinetic equations of weak turbulence.

1 Introduction

La Magnéto-Hydro-Dynamique (MHD) est un modèle souvent utilisé pour l'étude du comportement turbulent des plasmas astrophysiques comme le vent solaire [1]; c'est aussi un outils indispensable pour étudier la stabilité d'un plasma confiné magnétiquement dans un tokamak [2]. Notre travail s'est focalisé sur le régime de turbulence faible – appelé aussi turbulence d'ondes – pour le système MHD incompressible en deux dimensions (2D). On considère la présence d'un fort champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0 appartenant au même plan que les champs fluctuants : $(\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{v}})$. L'étude précédente [3] dans laquelle un champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0 est placé dans le plan perpendiculaire aux fluctuations, a montré l'existence de solutions de type Kolmogorov-Zakharov et la localité de la turbulence. Sur la Fig. 1, nous présentons les deux types d'ondes d'Alfvén possibles en MHD 3D : celles dont les fluctuations sont transverses au fort champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0 (ondes d'Alfvén de cisaillement) et celles dont les fluctuations sont le long de \mathbf{B}_0 (pseudo-ondes d'Alfvén). Ces dernières sont souvent négligées en 3D car elles ont une dynamique esclave des premières. En revanche en 2D, ce sont elles qui gèrent la dynamique de la MHD.

Il est bien connu que le comportement de la turbulence MHD 3D est qualitativement différent de la turbulence classique (c'est-à-dire hydrodynamique). Dans le cas qui nous intéresse, la turbulence MHD tend vers un état très anisotrope tel que $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$: en effet, en présence d'un fort champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0 , la cascade d'énergie se fait essentiellement, voire exclusivement, dans la direction perpendiculaire à \mathbf{B}_0 . On retrouve cette propriété dans le cas du système MHD 2D. Notre étude a pour objectif de comparer le comportement de ces deux systèmes et de mettre en évidence les différences fondamentales. Notre objectif est aussi de mettre en garde contre l'utilisation parfois abusive de modèles ou de simulations MHD 2D pour décrire le cas 3D très anisotrope.

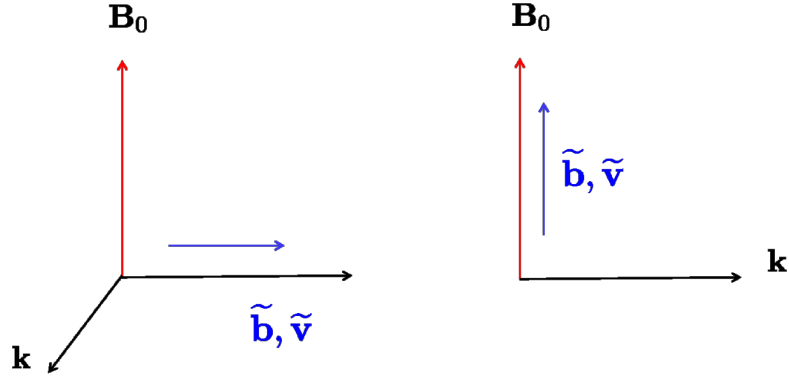


Figure 1. Les ondes d'Alfvén de cisaillement (à gauche) et les pseudo-ondes d'Alfvén (à droite).

2 Régime de turbulence faible

2.1 Paquets d'ondes d'Alfvén

Dans l'approche de turbulence faible, l'état statistique d'un système peut être représenté par un grand nombre d'ondes interagissant faiblement entre-elles. L'information sur le comportement d'un tel système peut être obtenue à travers l'équation cinétique d'ondes du spectre d'énergie. La dérivation d'une telle équation par une décomposition en séries asymptotiques en puissance des faibles nonlinéarités pour les ondes d'Alfvén a été réalisée pour la première fois en 2000 par Galtier et al. [3]. Dans ce travail, les auteurs ont considéré un fluide MHD incompressible 3D.

Une des raisons qui explique qu'une telle étude n'avait pas été réalisé auparavant est que l'application du formalisme de turbulence faible était considérée comme incompatible avec les ondes d'Alfvén incompressibles. En effet, dans ce cas la vitesse de groupe est la même pour tous les paquets d'ondes d'Alfvén indépendamment de leur vecteur d'ondes. Cela peut potentiellement mener à des effets cumulatifs à longue échelle temporelle qui seraient néfastes pour l'application de la théorie de turbulence faible. Cependant l'étude précédente [3] a montré que les ondes d'Alfvén représentent une exception à cette règle car les ondes qui se propagent dans la même direction n'interagissent pas entre-elles, alors que celles qui se propage dans des directions opposées ont une durée d'interaction finie pendant laquelle elles ne peuvent échanger qu'une quantité d'énergie finie. L'outil principal de notre travail est le formalisme cinétique d'ondes résumé dans l'ouvrage de Zakharov et al. [4] et plus récemment dans celui de Nazarenko [5].

2.2 Équations 2D en variables d'Elsässer

Dans notre étude, on considère le modèle MHD 2D inviscide suivant :

$$\partial_t \psi + \{\phi, \psi\} = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t \nabla^2 \phi + \{\phi, \nabla^2 \phi\} - \{\psi, \nabla^2 \psi\} = 0, \quad (2)$$

où les fonctions $\phi = \phi(x, y)$ et $\psi = \psi(x, y)$ correspondent, respectivement, aux flux d'un champ de vitesse et d'un champ magnétique (qui est supposé être normalisé à une vitesse). Les crochets de Poisson sont donnés par la relation :

$$\{f, g\} = \partial_x f \partial_y g - \partial_y f \partial_x g. \quad (3)$$

Par la suite, on supposera la présence d'un fort champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0 . Ainsi, la fonction de flux magnétique peut être décomposée comme $\psi = \psi_0 \pm \tilde{\psi}$, où la partie $\psi_0 = -B_0 y$ correspond au champ magnétique de fond orienté dans la direction \hat{x} et $\tilde{\psi}$ représente la partie fluctuante. Avec ces nouvelles

notations, le système (1)–(2) s'écrit :

$$\partial_t \tilde{\psi} + \{\phi, \tilde{\psi}\} = B_0 \partial_x \phi, \quad (4)$$

$$\partial_t \nabla^2 \phi + \{\phi, \nabla^2 \phi\} - \{\tilde{\psi}, \nabla^2 \tilde{\psi}\} = B_0 \partial_x \nabla^2 \tilde{\psi}. \quad (5)$$

On peut remarquer qu'après le remplacement de la dérivée partielle par rapport à x en dérivée partielle par rapport à z dans le membre de droite de ce système, on obtient le modèle 3D de MHD réduite (dit RMHD) [6].

Afin de pouvoir mettre en évidence la structure sous-jacente de ce système, on introduit les fonctions de flux d'Elsässer :

$$\zeta^\pm = \phi \mp \tilde{\psi}. \quad (6)$$

Le système (4)–(5) s'écrit alors (après application du Laplacien sur (4)) :

$$\nabla^2 (\partial_t \zeta^\pm \pm B_0 \partial_x \zeta^\pm) = -\frac{1}{2} (\{\zeta^-, \nabla^2 \zeta^+\} + \{\zeta^+, \nabla^2 \zeta^-\} \mp \nabla^2 \{\zeta^+, \zeta^-\}). \quad (7)$$

On remarque ici l'absence d'interaction entre les variables d'Elsässer de même signe : cela s'explique par le fait que les ondes qui se propagent dans la même direction n'interagissent pas entre-elles. Ainsi, le formalisme cinétique d'ondes pourra être utilisé dans le cadre de ce problème.

3 Équations cinétiques d'ondes – Méthode

3.1 Régime linéaire

La première étape du développement du formalisme de turbulence d'ondes passe par l'identification des modes propres dans le régime linéaire. On cherche donc des solutions sous la forme d'onde :

$$\zeta^\pm \propto e^{i(k_x x + k_y y) - i\omega^\pm t}, \quad (8)$$

et on identifie les fréquences propres :

$$\omega^\pm = \pm B_0 k_x. \quad (9)$$

À partir de ces relations, on identifie les ondes qui se propagent parallèlement au champ magnétique ambiant (dans un sens ou dans l'autre) avec la vitesse de groupe $\mathbf{v}_g^\pm = \pm B_0 \mathbf{e}_z$.

3.2 Régime non-linéaire

À l'étape suivante, on place notre système dans une boîte périodique 2D de dimensions $L_x \times L_y$ et on définit la transformée de Fourier pour les variables d'Elsässer :

$$\hat{\zeta}_k^\pm = L_x^{-1} L_y^{-1} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \zeta^\pm(\mathbf{x}) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (10)$$

Dans l'espace de Fourier le système (7) s'écrit :

$$k^2 \left(\partial_t \hat{\zeta}_k^\pm \pm i B_0 k_x \hat{\zeta}_k^\pm \right) = [k_1, k_2]_z (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}) \hat{\zeta}_{k_1}^\mp \hat{\zeta}_{k_2}^\pm. \quad (11)$$

On passe maintenant à l'étape clef dans le formalisme cinétique d'ondes en introduisant les variables qui rendent compte de la séparation des échelles en temps. Autrement dit, on passe dans la représentation d'interaction :

$$c_k^\pm = i k \hat{\zeta}_k^\pm e^{i\omega^\pm t} / \epsilon, \quad (12)$$

où c_k^\pm est l'amplitude de l'onde dont la variation temporelle est lente, ω^\pm est la fréquence rapide et ϵ est un paramètre petit qui mesure le degré de non-linéarité de notre système. Il peut être défini comme étant le

rapport des amplitudes d'un champ magnétique fluctuant sur l'amplitude du champ magnétique ambiant $\epsilon = \tilde{b}/B_0$. Autrement dit, la présence d'un fort champ magnétique ambiant introduit la séparation des échelles de mouvement dans notre système. Dans la représentation d'interaction, le système (11) s'écrit :

$$\dot{c}_k^\pm = -i\epsilon \sum_{1,2} V_{k12} e^{\pm 2ik_{1x}t} c_1^\mp c_2^\pm \delta_{12}^k, \quad (13)$$

avec $c_{1,2}^\pm = c^\pm(\mathbf{k}_{1,2})$ et le coefficient d'interaction :

$$V_{k12} \equiv V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_2) [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2]_z}{k k_1 k_2}. \quad (14)$$

3.3 Équation cinétique pour le spectre

Après avoir obtenu l'expression du système initial dans la représentation d'interaction, on peut poursuivre le développement du formalisme de turbulence d'ondes. On utilise la séparation d'échelles en temps pour introduire une échelle de temps intermédiaire T qui est supposé être beaucoup plus grande que celle du régime purement linéaire $t_L = 2\pi/\omega_L$, mais aussi beaucoup plus petite que le temps non-linéaire t_{nl} du système, ce qui revient à considérer l'inégalité :

$$t_L \ll T \ll t_{nl}. \quad (15)$$

On cherche ensuite la solution pour $t = T$ sous forme de décomposition en série par rapport au petit paramètre ϵ :

$$b_k^\pm = c_k^{\pm;(0)} + \epsilon c_k^{\pm;(1)} + \epsilon^2 c_k^{\pm;(2)} + \dots, \quad (16)$$

où l'on suppose que $c_k^{\pm;(0)} = c_k^\pm(0)$ en régime linéaire. Après avoir substitué cette décomposition dans le système (13), on peut obtenir les expressions pour les amplitudes aux ordres supérieurs. Une fois le calcul des propagateurs terminé, on considère la limite $T \rightarrow \infty$. On utilise par la suite les expressions pour ces amplitudes afin d'obtenir la dynamique du spectre donné par les interactions triadiques :

$$n_k^\pm(T) - n_k^\pm(0) = \left\langle |c_k^\pm|^2 \right\rangle + \left\langle c_k^{(\pm,0)*} c_k^{(\pm,2)} \right\rangle + \left\langle c_k^{(\pm,0)} c_k^{(\pm,2)*} \right\rangle, \quad (17)$$

où le spectre d'énergie des pseudo-ondes d'Alfvén n_k^\pm est définie par les règles de quantification :

$$\langle c_1^\pm c_2^\pm \rangle = \delta_{12} n_1^\pm, \quad \langle c_1^\pm c_2^{*\pm} \rangle = \delta_1^2 n_1^\pm, \quad \langle c_1^\pm c_2^\mp \rangle = 0. \quad (18)$$

Dans le cadre de cet article, nous n'allons pas rentrer plus dans le détail des calculs ; nous allons passer directement à la présentation du résultat final pour l'équation cinétique d'ondes, puis nous allons nous concentrer sur son analyse. L'équation cinétique d'ondes obtenue asymptotiquement pour le système MHD 2D s'écrit :

$$\dot{n}_k^\pm = 4\pi\epsilon^2 \int V_{k12}^2 n_1^\mp [n_2^\pm - n_k^\pm] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(2k_{1x}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \quad (19)$$

3.4 Limite fortement anisotrope

L'équation (19) mène à une dynamique fortement anisotrope avec des transferts nonlinéaires d'énergie uniquement dans la direction transverse au champ magnétique moyen. Cette propriété nous permet de prendre la limite anisotrope $k_x \ll k_y$ pour lequel le système se simplifie en partie. Il devient :

$$\begin{aligned} \partial_\tau n^\pm(k_{2x}, k_y; \tau) \\ = 4\pi\epsilon^2 \int n^\mp(0, k_{1y}; 0) [n^\pm(k_{2x}, k_{2y}; \tau) - n^\pm(k_{2x}, k_y; \tau)] \delta(k_y - k_{1y} - k_{2y}) dk_{1y} dk_{2y}. \end{aligned} \quad (20)$$

On peut remarquer qu'après avoir défini la nouvelle variable temporelle $\tau = k_x^2 t$, on a pu éliminer toute dépendance en nombre d'ondes parallèle k_x dans le membre de droite de l'équation cinétique d'ondes. Dans ces nouvelles variables, on voit que l'interaction entre les ondes est donnée uniquement par les composantes perpendiculaires des vecteurs d'ondes k_y, k_{y1}, k_{y2} .

4 Propriétés de la turbulence des pseudo-ondes d'Alfvén

Le but de cette section est de présenter les propriétés générales de la dynamique 2D du régime de turbulence d'ondes d'Alfvén. En particulier, on à la localité de la turbulence MHD.

4.1 Solutions de type Kolmogorov-Zakharov

On commence notre analyse en considérant que le système atteint l'état stationnaire et que l'on peut par conséquent négliger la dérivée temporelle dans l'équation cinétique (20). On recherche alors les solutions sous la forme de loi de puissance :

$$n_k^\pm \propto k_y^{\nu^\pm}. \quad (21)$$

On sépare l'intégrale dans l'équation (20) en deux parties. Ensuite on effectue la transformation conforme de Zakharov sur l'une d'entre-elles :

$$k'_{1y} = \frac{k_y k_{1y}}{k_{2y}}, \quad k'_{2y} = \frac{k_y^2}{k_{2y}}, \quad (22)$$

et on somme avec la partie non-transformée. La solution à flux constant correspond à la condition suivante sur les exposants ν^\pm :

$$\nu^+ + \nu^- = -2. \quad (23)$$

L'étude de la convergence de l'intégrale montre cependant qu'il n'existe aucune solution possible puisque la zone de convergence au sens propre n'existe pas. On remarque finalement que la solution associée au régime de turbulence équilibrée avec $\nu^+ = \nu^- = -1$ possède une divergence logarithmique.

4.2 Évolution dynamique du spectre d'énergie

Une des propriétés remarquables de l'équation cinétique d'ondes (20) en MHD 2D est sa simplicité. Afin de comprendre l'évolution du spectre d'énergie, on peut intégrer (numériquement) l'équation cinétique dans le cas simple d'une turbulence équilibrée ($n^+ = n^-$) en considérant deux cas. La première situation correspond à l'introduction d'une source gaussienne et d'une dissipation modélisé par un frottement uniforme. Dans ce cas, l'équation cinétique peut être résolue analytiquement. Dans la seconde situation, le frottement uniforme est remplacé par un frottement visqueux : ici les solutions sont obtenus numériquement (schéma de Crank-Nicolson en Fortran 90). Ces deux études différentes donnent le même résultat pour la dynamique du spectre. Nous illustrons le comportement de ce système avec la Fig. 2 qui montre l'évolution du spectre d'énergie en fonction du temps. On remarque que dans la limite des temps longs $\tau \rightarrow \infty$, limite pour laquelle le système devient stationnaire, le spectre d'énergie devient plat. On remarque que ce résultat numérique est différent de celui prédit par la transformation de Kolmogorov-Zakharov pour lequel la turbulence équilibrée se caractérise par la solution $\nu^+ = \nu^- = -1$.

On constate aussi que le transfert d'énergie entre les échelles – la cascade d'énergie – est absent. L'énergie initialement contenue dans le système est en fait transportée globalement vers l'état d'équilibre dynamique. Ceci peut être vu en faisant le calcul de l'énergie totale transférée dans le système. Pour les deux situations, on obtient :

$$B \propto \frac{\sigma_f}{(\lambda \sigma_d)^\alpha}, \quad (24)$$

avec σ_f et σ_d les amplitudes de forçage et de dissipation, alors que le paramètre λ contient l'information à propos des conditions initiales. L'exposant $\alpha = 1/2$ correspond au cas d'un frottement constant et $\alpha = 3/4$ à celui d'un frottement visqueux. Par ailleurs, on peut voir que l'information à propos de la source et de la dissipation, ainsi sur les conditions initiales est transmise tout le long de l'évolution. Aussi, nous pouvons conclure que la turbulence MHD 2D est non locale.

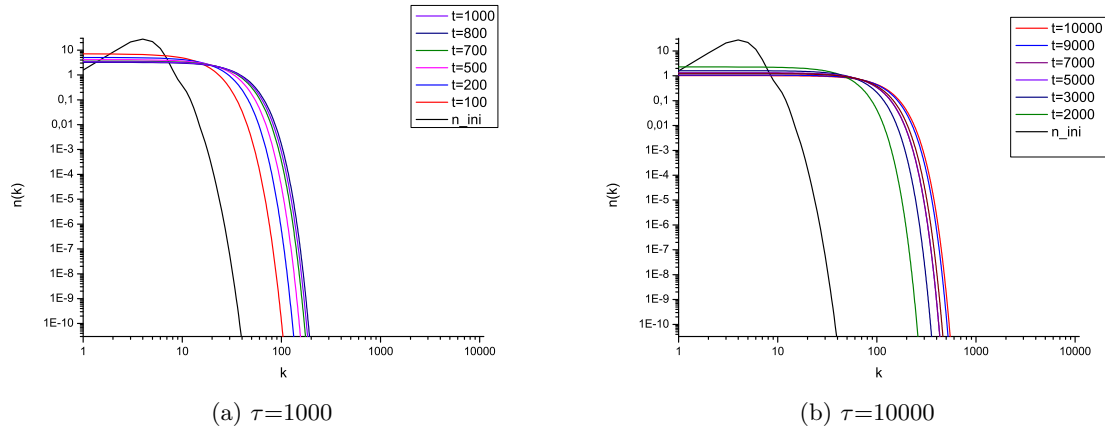


Figure 2. Évolution du spectre d'énergie $n(k)$ vers un état stationnaire pour lequel le spectre est plat.

5 Conclusion

Notre étude analytique et numérique montre qu'un fluide MHD en régime de turbulence faible a un comportement en deux dimensions très différent de celui en trois dimensions. En particulier, on constate l'absence de solution universelle de type Kolmogorov-Zakharov pour le spectre de l'énergie, ainsi que l'absence de cascade d'une échelle à l'autre. Notre étude montre aussi que la non-localité marginale pour les solutions de type Kolmogorov ne peut pas être éliminée à l'aide de corrections logarithmiques, comme proposés par Kraichnan [7].

Références

1. S. GALTIER, Multi-scale turbulence in the inner solar wind, *Journal of Low Temperature Physics*, **145**, 59–74 (2006).
2. J.-M. RAX, *Physique des Tokamaks*. Les Éditions de l'École Polytechnique (2011).
3. S. GALTIER, S.V. NAZARENKO, A.C. NEWELL, A. POUQUET, A weak turbulence theory for incompressible MHD, *Journal of Plasma Physics*, **63** (5), 447–488 (2000).
4. V.E. ZAKHAROV, V.S. L'VOV AND G. FALKOVICH, *Kolmogorov spectra of turbulence 1. Wave turbulence*. Springer, Berlin (1992).
5. S.V. NAZARENKO, *Wave turbulence*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2011).
6. H.R. STRAUSS, Nonlinear, three-dimensionnal magnetohydrodynamics of noncircular tokamaks, *Physics of Fluids*, **19**, 134–140 (1976).
7. R. KRAICHNAN, Inertial-range transfer in two-and three-dimensional turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, **47** (3), 525–535 (1971).