Convergence géométrique à deux échelles dans le formalisme covariant. Applications à l'équation de Vlasov homogénéisée.

Back Aurore[1] & Frénod Emmanuel[2]

[1] Post-doc, Centre de physique théorique-CNRS, Marseille, aurore.back@cpt.univ-mrs.fr
[2] Université de Bretagne-Sud,Vannes, Emmanuel.Frenod@univ-ubs.fr
aurore.back@cpt.univ-mrs.fr

La convergence à deux échelles initiée par Nguetseng [7] et reprise par Allaire [1] permet d'établir des résultats de convergence pour une suite de fonctions $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ définie dans un ouvert W de $\mathbb{R}^n$ et présentant des oscillations de période ϵ vers une fonction $u_0(\mathbf{x},\mathbf{y})$ définie sur $W\times\mathbb{R}^n$ et périodique en $\mathbf{y}$.
Le principe est le suivant : on fixe la période et on a u^ϵ qui est solution d'une équation de la forme

$$L^\epsilon u^\epsilon = f,$$

sur l'ouvert W avec L^ϵ est un opérateur différentiel présentant des oscillations de période ϵ et f un terme source indépendant de ϵ (on peut ajouter également des conditions au bords appropriées). On dira alors que la suite de fonction $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ dans $L^r(W)$ pour $r\in]1,+\infty]$ converge à deux échelles vers une fonction U dans l'espace $L^r(W,L^r_{per}(Y))$ si pour toute fonction $\psi\in C_c^\infty(W,C^\infty_{per}(Y))$ on a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_W u^\epsilon(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\epsilon})d\mathbf{x}=\int_Y\int_W U(\mathbf{x},\mathbf{y})\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}.$$

U est alors appelé la limite à deux échelles de u^ϵ dans $L^r(W,L^r_{per}(Y))$. Nguetseng [7] et Allaire [1] ont établi un critère de convergence à deux échelles qui sera très utile pour établir un système d'équations différentielles vérifié par la limite deux échelles. Frénod, Sonnendrücker [3], Han-Kwan [4] et bien d'autres ont utilisé ces outils dans le cadre de l'équation de Vlasov-Poisson.

Comme les équations de la Physique peuvent s'écrire en utilisant les formes différentielles, on propose ici de développer la convergence à deux échelles dans le cadre de la géométrie différentielle [2,8]. On peut alors montrer que cette convergence géométrique à deux échelles résulte du théorème de Birkhoff et permet de travailler dans un cadre plus adapté pour les équations (les variétés différentielles).
Il est alors intéressant d'appliquer cette théorie sur l'équation de Vlasov. En adimensionnant celle-ci on arrive à mettre en évidence le rayon de Larmor fini [3] et on fait donc apparaître dans cette équation les oscillations de période ϵ. On peut ainsi l'écrire sous la forme $L^\epsilon u^\epsilon = 0$. On utilisera alors la convergence géométrique à deux échelles sur l'équation de Vlasov et on établira une équation différentielle vérifiée par la limite deux échelles.

Références

1. Allaire G., Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. Anal., 1992.
2. Back A., Étude théorique et numérique des équations de Vlasov-Maxwell dans le formalisme covariant, Thèse, 2011.
3. Frénod E. and Sonnendrücker E., The finite Larmor radius approximation, SIAM J. Math. Anal., 2001.
4. Han-Kwan D., The three-dimensional finite Larmor radius approximation, Asymptot. Anal., 2010.
5. Hopf E., Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, 1939.
6. Mautner F. I., Geodesic flows on symmetric Riemann spaces, Ann. of Math. (2), 1957.
7. Nguetseng G., A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, SIAM J. Math. Anal., 1989.
8. Pak H. C., Geometric two-scale convergence on forms and its applications to Maxwell's equations, Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math., 2005.