

Sur le comportement dynamique non linéaire des Systèmes à événements discrets relaxés dans des demi-anneaux Idempotents

Abderahim Benfekir, Samir Hamaci Laurent Laval & Mohamed Bouhamida

13, boulevard de l'Hautail, Cergy-pontoise, 95092 cedex
s.hamaci@epmi.fr

Résumé. Les systèmes à événements discrets (SED) sont des systèmes qui évoluent dans des espaces discrets dans lesquels toutes les variables d'états prennent leurs valeurs dans un ensemble dénombrable, et des évolutions, nommées trajectoires, basées sur une succession des états et des transitions. Plusieurs concepts (théories, méthodes, outils, modèles et langages) ont été élaborés afin de maîtriser la complexité croissante de la conception et du développement de ces systèmes. Ils recouvrent plusieurs domaines d'applications tels que les systèmes de production manufacturière, la logistique, les systèmes de transport, les réseaux de communication, les circuits logiques, etc. L'étude de ces systèmes constitue, depuis le début des années 70, un domaine de recherche très actif (de par son intérêt théorique et économique) ayant donné lieu à de nombreuses publications. De cette littérature se dégagent de multiples classes de systèmes mettant en jeu des phénomènes de natures différentes : parallélisme, saturation, synchronisation, exclusion mutuelle, choix, séquençement : En raison de la dynamique complexe de ces systèmes, les modèles mathématiques utilisées pour les décrire n'en permettent pas toujours une analyse efficace.

Certaines sous-classes de SED bénéficient néanmoins de modèles bien adaptés pour aborder les problèmes d'évaluation de performance ou de commande. En particulier, au début des années 80, une nouvelle théorie, permettant d'étudier une classe particulière de systèmes, a vu le jour sous l'impulsion de chercheurs réunis par la suite dans le groupe Max Plus. Leurs premiers travaux montrent que les systèmes mettant uniquement en jeu des phénomènes de synchronisation et de saturation peuvent être modélisés par des réseaux de Petri particuliers, appelés graphes d'événements temporisés (GET). Ces derniers admettent une représentation linéaire sur une structure algébrique idempotente appelée l'algèbre des dioïdes (l'algèbre $(\min, +)$ étant un exemple de dioïde). Néanmoins, les techniques développées dans le cadre des systèmes à événements discrets atteignent leur limite, lorsque la taille du système considéré est importante (du fait du nombre important d'entités). Il s'avère alors utile d'utiliser des GET à arcs pondérés, encore appelés GET avec multiplieurs (GETM), ce qui permet de réduire la taille du modèle. Ces graphes permettent également de modéliser de façon simple des opérations d'assemblage et de désassemblage de produits présents dans certains systèmes de production.

Contrairement aux GET (non valués), les GETM n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre $(\min, +)$. Cette non linéarité - de par les poids sur les arcs - est due à la présence de parties entières dans le modèle $(\min, +)$ régissant l'évolution dynamique de ces graphes.

Pour pallier à ce problème de non linéarité et pour pouvoir appliquer certains résultats développés dans le cadre de la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes, qui sont des demi-anneaux idempotents, une nouvelle méthode de linéarisation du modèle mathématique régissant l'évolution dynamique sera présentée. Contrairement aux méthodes existantes, cette méthode s'applique sur des réseaux de Petri relaxés, c'est-à-dire non frottements connexes avec entrées et sorties. Le modèle linéaire obtenu sera utilisé pour appliquer certains résultats de la théorie des systèmes linéaires pour analyser le comportement des ces systèmes et d'en déduire leurs performances. Cette méthode est développée dans un demi-anneau idempotent, qui est un dioïde d'opérateurs. Pour illustrer cette méthode, un exemple d'application sera présenté.

Références

1. F.BACCELLI, G.COHEN, G.OLSDER AND J.-P. QUADRAT, Synchronization and Linearity : Algebra for Discrete Event Systems. *Wiley* (1992).
2. G. COHEN, S. GAUBERT AND J.-P. QUADRAT, *Timed-Event Graphs with Multipliers and Homogeneous Min-Plus Systems* IEEE TAC,1296-1302 (1998).
3. A. BENFEKIR, S. HAMACI, J.-L. BOIMOND, K. LABADI, *Performance evaluation of nonlinear weighted T-system* International Journal of Systems Science (2012).