

Dilatance des matériaux granulaires sous cisaillement : vers un empilement plus compact ?

Nicolas Rivier¹

Institut de Physique et Chimie des Matériaux de Strasbourg (IPCMS), et Université de Strasbourg, 3, rue de l'Université F-67084 Strasbourg
`nick@fresnel.u-strasbg.fr`

L'empilement le plus dense d'un matériau granulaire dur et sec (modélisé par des sphères dures de même rayon et friction tangentielle infinie qui force les grains à rouler sans glisser les uns sur les autres, ou à perdre contact) est un problème d'optimisation à plusieurs composantes, dont les solutions se trouvent sur la frontière de l'espace des configurations : Les contacts entre grains sont, autant que possible, des barres rigides ("struts") de longueur minimale. Cette frontière est constituée de régions différentiables (un grain roulant sur un autre) séparés par des points où les grains sont bloqués (points de Pareto). Le problème d'optimisation consiste donc à identifier les points de Pareto dans une empilement quelconque, et à explorer physiquement (par cisaillement) l'espace de configurations pour atteindre un autre point de Pareto de densité plus élevée.

À tout empilement correspond une tessellation (Delone) en tétraèdres : Les sphères en constituent les sommets et les arêtes, les contacts physiques (struts) ou seulement topologiques (de longueur non-minimale). Il s'agit de minimiser le volume de tous ces tétraèdres qui remplissent l'espace. Chaque tétraèdre peut se déformer en un polygone de quatre struts et deux arêtes topologique opposées et perpendiculaires (trois alternatives), le mécanisme de la dilatance. Cette décomposition est cohérente sur toute la tessellation. L'empilement n'a alors que des circuits pairs de struts, et chaque grain peut donc rouler sans glisser sur ses voisins, répondre à un cisaillement, et explorer l'espace des configurations. Les points de Pareto sont immédiatement identifiables (configurations locales cubique compact ou similaire), ainsi que les configurations locales frustrées qui sont sur une ligne frontière de l'espace de configurations mais non-Pareto (comme par exemple cinq tétraèdres autour d'une arête commune), On a donc une représentation géométrique du problème d'optimisation. Notons que les points de Pareto sont aussi des points singuliers de la représentation duale de la tessellation de Delone (mousse de Voronoi).

La dilatance (empreinte de pied mouillée sur le sable) n'a été identifiée comme un paradoxe apparent qu'en 1885 par O. Reynolds. On l'explique simplement par un modèle minimal du sable constitué de sphères dures avec friction tangentielle infinie, empilées en tétraèdres et constituant un graphe (Delone). La poussée verticale du pied, une contrainte uniaxiale, cisaille le sable, force les grains à rouler les uns sur les autres, et les circuits impairs à s'ouvrir. Sous le pied, chaque tétraèdre se déforme pour ouvrir ses circuits triangulaires, augmente son volume et absorbe l'eau, qui est expulsée dans l'empreinte laissée par le pied.