

Sur la synchronisation de systèmes chaotiques bidirectionnellement couplés : Quelques résultats et une question ouverte

L. Laval¹, J.P. Barbot¹ & C. Letellier²

¹ ECS-Lab / ENSEA, 6 avenue du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise, France

² CORIA, Université de Rouen, Site Universitaire du Madrillet, 76801 Saint Etienne du Rouvray, France

laval@ensea.fr

Depuis le désormais célèbre résultat de Pecora et Carroll [1], une multitude d'articles a été consacrée à la synchronisation de systèmes chaotiques¹ (e.g. [2] et les références internes). Dans la très grande majorité des cas, ces articles considèrent des configurations de type Maître/Esclave, synonymes de couplages unidirectionnels (seul le système Maître transmettant des informations ou des ordres² à l'Esclave chargé de se synchroniser). En regard de cette forme de couplage et d'appairages de différents systèmes chaotiques existants (systèmes de Lorenz, Chua, Rössler, Chen, ...), de nombreuses conditions de synchronisation ont alors été définies à partir, essentiellement, d'analyses topologiques ou structurelles. Toutefois, à notre connaissance, très peu d'études relatives au cas d'un couplage bidirectionnel (où chaque système est à la fois Maître et Esclave) ont été menées en considérant la Théorie de la Commande pour support (à l'instar de [3] pour le cas unidirectionnel). Ainsi, cet article présente une étude de la synchronisation forcée de deux systèmes de Rössler couplés, de manière bidirectionnelle et symétrique, au travers de la transmission de signaux unidimensionnels (c.a.d. définis explicite) et n'agissant directement que dans une seule direction (la transmission n'influençant que la dynamique de l'état transmis). En regard de cette configuration et d'une analyse basée sur la Théorie de la Commande, nous montrons alors que :

1. La synchronisation relève essentiellement de conditions sur la *stabilisabilité* des écarts de trajectoires des systèmes (i.e. des erreurs de synchronisation), dans le cadre de la commande par injection de sortie scalaire. Autrement dit, le choix (optimal) de l'état transmis (servant de référence pour la commande par injection de sortie du récepteur) relève essentiellement de conditions de stabilisabilité de l'erreur de synchronisation, et pas non uniquement de critères d'observabilité et/ou de commandabilité, comme ce peut être le cas pour une configuration classique de type Maître/Esclave.
2. Même si elle s'avère effective dans les faits, la synchronisation complète³ des deux systèmes ne peut pas, d'un point de vue théorique, être garantie de manière absolue pour tous temps t . En effet, il apparaît que la synchronisation dépend explicitement de la région de l'espace (borné) dans lequel les trajectoires des systèmes évoluent majoritairement (i.e. la plupart du temps). Autrement dit, certaines directions de l'erreur de synchronisation ne sont stables qu'en moyenne sur la trajectoire, mais pas sur toute la trajectoire.

Références

1. L.M. Pecora, T.L. Carroll, *Synchronization in chaotic systems*, Phys. Rev. Lett., **64**, 821 (1990).
2. S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D.L. Valladares and C. Zhou, *The synchronization of chaotic systems*, Phys. Rep. **366**, 1 (2002)
3. H. Nijmeijer, I.M.Y. Mareels, *An observer looks at synchronization*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 44(10), 874-890, (1997)

1. qu'il s'agisse de paires ou d'ensembles (réseaux) de systèmes.
2. i.e. des informations de commande dans le cadre d'une synchronisation contrôlée de l'Esclave, forcé à adopter un comportement analogue ou quasi-analogue à celui du Maître.
3. pour tous les états.