Un point de vue nonlinéaire sur les instabilités hydrodynamiques

Jérôme Hoepffner

UPMC Univ Paris 06 & CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France
jerome.hoepffner@upmc.fr

Les instabilités classiques de la mécanique des fluides sont une collection de cas archétypaux de comment un écoulement peut se déstabiliser sous l'effet de perturbations infinitésimales : Kelvin-Helmholtz (déstabilisation d'une couche de cisaillement), Rayleigh-Taylor (fluide lourd au dessus d'un fluide léger), Couette (cisaillement constant), Taylor-Couette (cisaillement axisymétrique), Rayleigh-Plateau (cylindre liquide avec tension de surface)...

Chacune de ces configurations est archétypale en ce sens qu'elle contient le nombre minimum d'ingrédient nécessaire pour chacun représenter—et ainsi définir—une large classe de phénomènes. Ici, pour être plus concret, plutôt que "ingrédient", nous pouvons dire "paramètre physique". Un modèle devient ainsi un archétype lorsqu'il est défini par le nombre minimum de paramètres. C'est cette limite là que l'on cherche lorsqu'on énonce le fameux "as simple as possible but not simpler".

Prenons pour exemple la déstabilisation d'une couche de mélange. Dans une soufflerie, une plaque plane sépare deux courants fluides, l'un rapide et l'autre lent. La rencontre de ces deux courants forme une couche de cisaillement. Nous faisons maintenant abstraction de la soufflerie et de la plaque qui ont produit le cisaillement, on élimine la viscosité qui induit un épaississement progressif de la zone de cisaillement. Ces deux simplifications nous donnent un écoulement de base fixe dans un espace sans bornes. On suppose ensuite que l'épaisseur de la couche de cisaillement est nulle : c'est une discontinuité de vitesse. Cette simplification nous débarrasse de la forme du profil de vitesse et de la mesure de son épaisseur. Nous allons maintenant soumettre cet écoulement à une perturbation. Elle sera de très faible amplitude de sorte à pouvoir négliger les termes nonlinéaires de l'équation d'évolution. Ainsi, l'amplitude de la perturbation elle-même est un paramètre qui ne va plus influer. Mais cette perturbation, quelle en sera la forme ? Dans un domaine infini et homogène, un sinus simplifiera grandement le calcul.

Voilà le modèle le plus simple pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Il ne nous reste plus comme paramètres que la densité du fluide ρ, le saut de vitesse $\varDelta U$, la longueur d'onde λ de la perturbation, et le temps t qui nous permet de chronométrer sa croissance. Voici le modèle le plus simple. Si l'on enlève un paramètre de plus, il n'y a plus de phénomène. Le calcul montre que le taux de croissance exponentiel d'une onde est proportionnel à $1/\lambda$. C'est là le résultat final de l'étude, la relation de dispersion.

L'approche que je propose maintenant, c'est de réintroduire les termes nonlinéaires tout en retirant le paramètre de la longueur d'onde. Ce choix est suggéré par l'analyse dimensionnelle : mis à part la longueur d'onde de la condition initiale λ, il n'y a déjà dans le problème simplifié qu'une seule échelle de longueur : $L = t \times \varDelta U$. Cette longueur est proportionnelle au temps, et ainsi, puisqu'elle n'entre en compétition avec aucune autre longueur propre au problème, il existe une possibilité pour une solution nonlinéaire auto-semblable (voir [1]).

Je montre dans mon exposé que, en effet, cette solution auto-semblable existe et est stable (voir [2,3]). C'est la réponse nonlinéaire de la couche de cisaillement à une condition initiale localisée de forte amplitude. Je présente également des indices concernant le cas de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, et propose ainsi la généralisation de ce point de vue nonlinéaire sur les instabilités hydrodynamiques.

Références

1. Barenblatt (2006) Scaling, Cambridge University Press.
2. Hoepffner, Blumenthal and Zaleski (2011), Phys. Rev. Let. Vol 106, n10.
3. Hoepffner and Fontelos (2014), Phys. Fluids, submitted.